$\boxed{\textbf{F 1}}$ Assez simple ou proche du cours.

$\boxed{\textbf{F 2}}$ Demande du travail.

$\boxed{\textbf{F 3}}$ Délicat.

QUESTIONS COURTES 2003

Question 1 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 3}}$

Soient A, B deux matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes et que tout vecteur propre de A est également vecteur propre de B.
Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$.

Question 8 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 3}}$

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle. Peut–on avoir M semblable à $2M$? (on pourra commencer par étudier les valeurs propres d'une telle matrice).

Question 10 ESCP 2003 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Existe–t-il une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables ?

Existe–t-il une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices inversibles ?

QUESTIONS COURTES 2004

Question 3 ESCP 2004 $\boxed{\textbf{F 3}}$

Résoudre l'équation $X^3 = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.

Question 4 ESCP 2004 $\boxed{\textbf{F 1}}$

On confond polynôme et fonction polynôme. Soit f défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$f(P) : \, x \mapsto \int_0^1 P(x+t)\, dt$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-il diagonalisable ?

Question 7 ESCP 2004 $\boxed{\textbf{F 3}}$

Résoudre $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

QUESTIONS COURTES 2006

Question 6 ESCP 2006 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que l'on a : $a_{i,j} = 1$ si $i = j+1$ ou $i = j-1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon)

Q1. Soit λ un scalaire. Que peut-on dire du rang de $A - \lambda I_n$?

Q2. Montrer que A admet exactement n valeurs propres réelles.

Question 7 ESCP 2006 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Question 8 ESCP 2006 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer que $A + I_n$ ou $A - I_n$ est inversible.

QUESTIONS COURTES 2007

Question 2 ESCP 2007 $\boxed{\textbf{F 2}}$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles (s'il y en a).

Montrer que, lorsque $n = p$, $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Question 3 ESCP 2007 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $X^n = A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, admet-elle au moins une solution ?

Question 11 ESCP 2007 D. ADJERAD $\boxed{\textbf{F 1}}$

f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$. Montrer que si $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas supplémentaires alors f n'est pas diagonalisable.

Question 14 ESCP 2007 M. BOUCHER Oubliée mais du type suivant (ESCP 2006) $\boxed{\textbf{F 1 ou 0}}$

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Question 15 ESCP 2007 P. DESMICHEL $\boxed{\textbf{F 1}}$

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\dim \operatorname{Ker} f = 2$. Donner plusieurs conditions nécessaires et suffisantes pour que f soit diagonalisable.

Question 16 ESCP 2007 G. GOBINET $\boxed{\textbf{F2}^+}$

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi uniforme sur $[-2, 2]$. Y est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p. X et Y sont indépendantes. t est un réel.

Trouver la probabilité pour que $\begin{pmatrix} X & 1 \\ t & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Question 18 ESCP 2007 V. OWEN $\boxed{\textbf{F 1}}$

φ est une forme linéaire sur un espace vectoriel E de dimension n non nulle. u est un vecteur non nul de E.

On considère l'endomorphisme f de E défini par : $\forall x \in E,\ f(x) = x + \varphi(x)\, u$.

Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

QUESTIONS COURTES 2008

Question 3 ESCP 2008 $\boxed{\textbf{F 1}}$

Soit α un réel non nul, n un entier strictement plus grand que 1 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A - \alpha I) = 0$.

Montrer que A est diagonalisable.

QUESTIONS COURTES 2009

Question 13 ESCP 2009 $\boxed{\textbf{F 1}}$ SITBON

X est Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p.

Trouver la probabilité pour que les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & Y \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X & X \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soient semblables.

QUESTIONS COURTES 2010

Question 16 ESCP 2010 Obtenue par E. JARDIN $\boxed{\textbf{F 1}}$

A est une matrice carrée d'ordre n. Pour tout (i, j) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} = 1$ si $i + j = n + 1$ et 0 sinon.

Déterminer le spectre de A

Question 21 ESCP 2010 S. ALLAIN $\boxed{\textbf{F 1}}$

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a p valeurs propres distinctes et est diagonalisable. Donnez le degré minimal pour un polynôme annulateur non nul de cette matrice.

QUESTIONS COURTES 2011

Question 5 ESCP 2011 $\boxed{\textbf{F2}}$

Soient trois nombres complexes a, b , c. Calculer A^7 avec : $A = \begin{pmatrix} 1 + i\sqrt{3} & a & b \\ 0 & 1 - i\sqrt{3} & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

QUESTIONS COURTES 2011 (suite)

Question 6 ESCP 2011 V. MESKHI $\boxed{\textbf{F1}}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

QUESTIONS COURTES 2012

Question 23 ESCP 2012 $\boxed{\textbf{F 1}}$ Obtenue par **S. TEIAR**

A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible et qu'il existe q dans $\mathbb{N}^*$ telle que $B^q = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Montrer que $I_n + A^{-1}BA$ et $I_n + ABA^{-1}$ sont inversibles.

Question 28 **ESCP 2012** $\boxed{\textbf{F1}}$

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ v(A) = A + {}^tA.$

Q1. Montrer que v est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer v^2.

Q2. Montrer que v est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

Q3. Déterminer $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$.
