# QUELQUES RÉSULTATS (OU RÉFLEXES ?) UTILES EN RÉDUCTION

Sauf mention du contraire $E$, $E'$ et $E''$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

## Niveau 1

**R.1** $A$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda$ un élément de $\mathbb{K}$.

1. $\lambda$ est valeur propre de $A$ si et seulement si il existe un élément non nul $X$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$.
2. $\lambda$ est valeur propre de $A$ si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
3. $\lambda$ est valeur propre de $A$ si et seulement si $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$.

**R.2** $A$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda$ une valeur propre de $A$.

$$\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n).$$

**R.3** $f$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$ non nulle.

1. $\lambda$ est valeur propre de $f$ si et seulement si $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif (resp. n'est pas surjectif, resp. n'est pas bijectif).
2. $\lambda$ est valeur propre de $f$ si et seulement si $\mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}_E) < \dim E$.

**R.4** $f$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie et $\lambda$ une valeur propre de $f$.

$$\dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda) = \dim E - \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}_E).$$

**R.5** $E$ est de dimension $n$ non nulle. $\mathcal{B}$ est une base de $E$ et $f$ est un endomorphisme de $E$ de matrice $A$ dans $\mathcal{B}$.

1. $f$ et $A$ ont même spectre.
2. Soit $u$ est un élément de $E$ de matrice $X$ dans $\mathcal{B}$ et $\lambda$ un élément de $\mathbb{K}$.

$X$ est un vecteur propre de $A$ associé à $\lambda$ si et seulement si $u$ est un vecteur propre de $f$ associé à $\lambda$.

3. Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$ et $A$. Le sous-espace propre de $f$ associé à $\lambda$ a même dimension que le sous-espace propre de $A$ associé à $\lambda$. Autrement dit :

$$\dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = \dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda)$$

.

**R.6** $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. 0 est valeur propre de $A$ si et seulement si il existe un élément non nul $X$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.
2. 0 est valeur propre de $A$ si et seulement si $A$ n'est pas inversible.
3. 0 est valeur propre de $A$ si et seulement si $\mathrm{rg}\, A < n$.

**R.7** $f$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$ non nulle.

1. 0 est valeur propre de $f$ si et seulement si $f$ n'est pas injectif (resp. n'est pas surjectif, resp. n'est pas bijectif).
2. 0 est valeur propre de $f$ si et seulement si $\operatorname{rg} f < \dim E$.

---

**R.8** $f$ est un endomorphisme de $E$. $\lambda_1$, $\lambda_2$,..., $\lambda_p$ sont $p$ valeurs propres **distinctes** de $f$.

*Attention $\lambda_1$, $\lambda_2$,..., $\lambda_p$ ne sont pas nécessairement toutes les valeurs propres de $f$...*

Pour tout $i$ dans $[\![1, p]\!]$, $u_i$ est un vecteur propre de $f$ associé à la valeur $\lambda_i$ et $\mathcal{F}_i$ est une famille **libre** du sous-espace propre SEP $(f, \lambda_i)$ associé à $\lambda_i$.

1. $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une famille libre de $E$.
2. "$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_p$" est une famille libre de $E$.
3. SEP $(f, \lambda_1)$, SEP $(f, \lambda_2)$,..., SEP $(f, \lambda_p)$ sont en somme directe.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim \text{SEP } (f, \lambda_k) \leqslant \dim E$.

---

**R.9** On suppose que $E$ est de dimension $n$ non nulle. $f$ est un endomorphisme de $E$.

1. $f$ possède au plus $n$ valeurs propres distinctes.
2. Les sous-espaces propres de $f$ (s'il en existe) sont en somme directe.
3. La somme des dimensions des sous-espaces propres de $f$ (s'il en existe) ne dépasse pas $n$.

Autrement dit : $\boxed{\displaystyle\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} \dim \text{SEP } (f, \lambda) \leqslant \dim E}$.

---

**R.10** $E$ est de dimension $n$ non nulle et $f$ est un endomorphisme de $E$.

Si $f$ possède $n$ valeurs propres distinctes, $f$ est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

---

**R.11** $E$ est de dimension finie non nulle et $f$ est un endomorphisme de $E$ .

Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $f$ est diagonalisable.

i') Il existe une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $f$.

i") Il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale.

ii) $E$ est la somme (directe) des sous-espaces propres de $f$ ; c'est à dire : $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \text{SEP } (f, \lambda)$.

iii) **P** $\displaystyle\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} \dim \text{SEP } (f, \lambda) = \dim E$, autrement dit la somme des dimensions des sous-espaces propres de $f$ est égale à la dimension de $E$. q

---

**R.12** $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n$ non nulle.

$f$ est un endomorphisme **diagonalisable** de $E$.

1. On obtient une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $f$ en concaténant une base de chacun des sous-espaces propres de $f$.

2. Si $\mathcal{B}$ est une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $f$ respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$ la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}$ est la matrice diagonale $\operatorname{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

**R.13** $A$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\lambda_1$, $\lambda_2$,..., $\lambda_p$ sont $p$ valeurs propres **distinctes** de $A$.

*Attention $\lambda_1$, $\lambda_2$,..., $\lambda_p$ ne sont pas nécessairement toutes les valeurs propres de $A$...*

Pour tout $i$ dans $[\![1, p]\!]$, $X_i$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur $\lambda_i$ et $\mathcal{F}_i$ est une famille **libre** du sous-espace propre SEP $(A, \lambda_i)$ associé à $\lambda_i$.

1. $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. "$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \dots \cup \mathcal{F}_p''$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
3. SEP $(A, \lambda_1)$, SEP $(A, \lambda_2)$,..., SEP $(A, \lambda_p)$ sont en somme directe.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda_k) \leqslant n$.

**R.14** Soit $A$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $A$ a au plus $n$ valeurs propres distinctes.
2. Les sous-espaces propres de $A$ (s'il en existe) sont en somme directe.
3. La somme des dimensions des sous-espaces propres de $A$ ne dépasse pas $n$.

Autrement dit : $\boxed{\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} \dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) \leqslant n}$.

**R.15** $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $A$ possède $n$ valeurs propres distinctes, $A$ est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

**R.16** $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $A$ est diagonalisable.

i') $A$ est semblable à une matrice diagonale.

ii) $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la somme (directe) des sous-espaces propres de $A$ ; autrement dit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \mathrm{SEP}\ (A, \lambda)$.

iii) La somme des dimensions des sous-espaces propres de $A$ est égale à n ; autrement dit $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} \dim \mathrm{SEP}\ (A, \lambda) = n$.

iv) Il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $A$.

v) $A$ est la matrice d'un endomorphisme diagonalisable.

vi) L'endomorphisme canoniquement associé à $A$ est diagonalisable.

**R.17** Soit $A$ une matrice **diagonalisable** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On obtient une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $A$ en concaténant une base de chacun des sous-espaces propres de $A$.

2. Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $A$ respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$ et si $P$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à la base $\mathcal{B}$ alors :

$$P^{-1}AP \text{ est la matrice diagonale } \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

---

**R.18** Soit $A$ une matrice **diagonalisable** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ainsi il existe une matrice inversible $P$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ telles que $P^{-1}AP = D$. On note, pour tout $j$ élément de $[\![1, n]\!]$, $C_j$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de $P$.

Alors $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $A$ respectivement associés aux valeurs propres $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$.

---

**R.19** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

$\lambda$ est une valeur propre de $A$ si et seulement si $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$.

---

**R.20** $A$ appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A$ est triangulaire les valeurs propres de $A$ sont les éléments de sa diagonale.

---

**R.21** Soit $A$ **une matrice diagonalisable** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La somme des valeurs propres de $A$ est égale à sa trace. $\boxed{\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda = \mathrm{Tr}(A)}$.

---

**R.22** $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ \deg f(P) \leqslant \deg P$.

Alors la matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.

Sa diagonale fournit les valeurs propres de $f$.

---

**R.23** Deux matrices semblables ont même spectre et sont simultanément diagonalisables..

---

**R.24** $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension non nulle $n$. $f$ est un endomorphisme de $E$.

Une droite vectorielle de $E$ est stable par $f$ si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de $f$.

---

**R.25** Si $f$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ de dimension $n$ ayant $n$ valeurs propres deux à deux distinctes alors les sous-espaces propres de $f$ sont des droites vectorielles et $f$ est diagonalisable.

"Même chose" pour les matrices.

---

**R.26** $f$ est un endomorphisme de $E$ et $\lambda$ est une valeur propre **non nulle** de $f$. Alors SEP $(f, \lambda) \subset \mathrm{Im}\, f$.

Ainsi les valeurs propres non nulles de $f$ sont les valeurs propres de la restriction de $f$ à $\mathrm{Im}\, f$ qui est (presque...) un endomorphisme de $\mathrm{Im}\, f$.

---

**R.27** $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• $\mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}(A)$.

• Si $\lambda$ est une valeur propre de $A$ : $\dim\Big(\text{SEP } ({}^tA, \lambda)\Big) = \dim\Big(\text{SEP } (A, \lambda)\Big)$.

• ${}^tA$ est diagonalisable si et seulement si $A$ est diagonalisable.

---

**R.28** $A$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• 0 n'est pas valeur propre de $A$.

• $\mathrm{Sp}(A^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

• Si $\lambda$ est une valeur propre de $A$ : SEP $\left(A^{-1}, \frac{1}{\lambda}\right) = $ SEP $(A, \lambda)$.

• $A^{-1}$ est diagonalisable si et seulement si $A$ est diagonalisable.

• On suppose que $A$ est diagonalisable et que $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $A$ respectivement associés aux valeur propres $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$. $P$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à cette base $\mathcal{B}$.

Alors $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $A^{-1}$ respectivement associés aux valeur propres $\dfrac{1}{\alpha_1}$, $\dfrac{1}{\alpha_2}$, ..., $\dfrac{1}{\alpha_n}$, $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et $P^{-1}A^{-1}P = \mathrm{Diag}\left(\dfrac{1}{\alpha_1}, \dfrac{1}{\alpha_2}, \dots, \dfrac{1}{\alpha_n}\right)$.

---

**R.29** Soit $p$ une projection de $E$. $p$ est diagonalisable et si $p$ n'est ni $0_{\mathcal{L}(E)}$ ni $\mathrm{Id}_E$ alors $\mathrm{Sp}\, p = \{0, 1\}$.

---

**R.30** Soit $s$ une symétrie de $E$. $s$ est diagonalisable et si $s$ n'est ni $\mathrm{Id}_E$ ni $-\mathrm{Id}_E$ alors $\mathrm{Sp}\, s = \{-1, 1\}$.

---

**R.31** $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). $f$ et $g$ sont deux endomorphismes de $E$.

Si $f \circ g = g \circ f$ les sous-espaces propres de $f$ (resp. $g$) sont stables par $g$ (resp. $f$).

"Même chose" pour les matrices.

---

**R.32** $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). $f$ et $g$ sont deux endomorphismes de $E$.

On suppose que $f$ admet $n$ valeurs propres deux à deux distinctes. $f$ est donc diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

1. $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si il existe une base de $E$ constituée de vecteurs propres pour $f$ et pour $g$.
2. $f \circ g = g \circ f$ si et seulement $f$ et $g$ se diagonalisent dans la même base.

"Même chose" pour les matrices.

---

**R.33** $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $Q\,(\mathrm{Sp}(A)) \subset \mathrm{Sp}\,(Q(A))$ (c'est du cours).
2. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$. SEP $(A, \lambda) \subset$ SEP $(Q(A), Q(\lambda))$ (c'est du cours).

"Même chose" pour les endomorphismes...

---

**R.34** $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

On suppose que $A$ est diagonalisable et que $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $A$ respectivement associés aux valeur propres $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_n$. $P$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à cette base $\mathcal{B}$. $Q$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

• $Q(A)$ est diagonalisable.

• $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est encore une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ constituée de vecteurs propres de $Q(A)$ respectivement associés aux valeur propres $Q(\alpha_1)$, $Q(\alpha_2)$, ..., $Q(\alpha_n)$.

• $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ et $P^{-1}Q(A)P = \mathrm{Diag}(Q(\alpha_1), Q(\alpha_2), \dots, Q(\alpha_n))$.

• $\mathrm{Sp}\, Q(A) = \{Q(\alpha_1), Q(\alpha_2), \dots, Q(\alpha_n)\}$ ou $\mathrm{Sp}\, Q(A) = Q(\mathrm{Sp}\, A)$.

"Même chose" pour les endomorphismes...

---

**R.35** Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'ayant qu'une seule valeur propre $\lambda$.

$A$ est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda\, I_n$.

"Même chose" pour les endomorphismes...

---

**R.36** Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au moins un polynôme annulateur non nul.

"Même chose" pour les endomorphismes...

---

**R.37** Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P$ un polynôme annulateur non nul de $A$.

Le spectre de $A$ est contenu dans l'ensemble des zéros de $P$.

"Même chose" pour les endomorphismes...

---

**R.38** Soient $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Tout multiple d'un polynôme annulateur de $A$ est un polynôme annulateur de $A$.

"Même chose" pour les endomorphismes...

---

**R.39** $f \in \mathcal{L}(E)$. $f$ est **diagonalisable** et $\lambda_1$, ..., $\lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de $f$.

$(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\dots(X-\lambda_p)$ est un polynôme annulateur de $f$.

---

**R.40** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $A$ est **diagonalisable** et $\lambda_1$, ..., $\lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de $A$.

$(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\dots(X-\lambda_p)$ est un polynôme annulateur de $A$.

---

**R.41** Soient $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\boxed{\mathbb{C}})$ et $Q$ un polynôme annulateur non nul de $A$.

L'une au moins des racines de $Q$ est une valeur propre de $A$.

Même chose pour les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{C}$.

---

**R.42** Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\boxed{\mathbb{C}})$ possède au moins une valeur propre.

Même chose pour les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{C}$.

---

**R.43** Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\boxed{\mathbb{R}})$. Soit $\lambda$ un élément de $\mathbb{C}$.

On suppose que $\lambda$ est une valeur propre de $A$.

1. $\overline{\lambda}$ est encore une valeur propre de $A$.
2. SEP $\left(A,\overline{\lambda}\right) = \{\overline{X}\,;\, X \in \text{SEP }(A,\lambda)\}$.
3. $\dim \text{SEP }\left(A,\overline{\lambda}\right) = \dim \text{SEP }(A,\lambda)$.

---

**R.44** On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose $\boxed{n \geqslant 2}$.

1. $\text{Sp}\, J = \{0, n\}$.
2. $J$ est diagonalisable.
3. SEP $(J,0)$ est l'hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ d'équation $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et

SEP $(J,n)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

---

**R.45** $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

• 1 est valeur propre de $A$.

• Si $\lambda$ est un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de $A$ : $|\lambda| \leqslant 1$.

---

**Niveau 2**

---

**R.46** $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. $P$ est un élément de $\mathbb{C}[X]$. $P\big(\mathrm{Sp}(A)\big) = \mathrm{Sp}\,\big(P(A)\big)$.

Même chose pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{C}$.

---

**R.47** $E$ est un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). $G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

$f$ est un endomorphisme **diagonalisable** de $E$. $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_p$ sont les $p$ valeurs propres de $f$.

$G$ est stable par $f$ si et seulement si $G = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} G_k$ où $G_1$, $G_2$, ..., $G_p$ sont p sous-espaces respectifs de SEP $(f, \lambda_1)$, SEP $(f, \lambda_2)$, ..., SEP $(f, \lambda_p)$.

---

**R.48** Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Tout multiple d'un polynôme annulateur de $A$ est un polynôme annulateur de $A$.

• Si $P_0$ est un polynôme annulateur non nul de $A$ de degré minimum, l'ensemble des polynômes annulateurs de $A$ est l'ensemble des multiples de $P_0$.

• Si $P_0$ est un polynôme annulateur non nul de $A$ de degré minimum, LES valeurs propres de $A$ sont LES racines de $P_0$.

• Il existe un unique polynôme normalisé $P_1$ de $\mathbb{K}[X]$ tel que l'ensemble des polynômes annulateurs de $A$ est l'ensemble des multiples de $P_1$. $P_1$ est le polynôme minimal de $A$. $P_1$ est l'unique polynôme annulateur normalisé de degré minimal de $A$.

"Même chose" pour les endomorphismes...

---

**R.49** $A$ et $B$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$.

1. $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$.
2. Si $\lambda$ est une valeur propre non nulle de $AB$ (et de $BA$) : $\dim \mathrm{SEP}\ (AB, \lambda) = \dim \mathrm{SEP}\ (BA, \lambda)$.
3. Si $A$ et $B$ sont inversibles : $AB$ est diagonalisable si et seulement si $BA$ est diagonalisable.

Même type de résultat pour les endomorphismes.

---

**R.50** Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Notons que $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $BA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

L'ensemble des valeurs propres non nulles de $AB$ coïncide avec l'ensemble des valeurs propres non nulles de $BA$.

Même type de résultat pour les endomorphismes.

---

**R.51** $A$ est une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\, A \subset \{0\}$ (autrement dit 0 est la seule valeur propre réelle possible de $A$).

2. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\, A \subset i\,\mathbb{R}$ (autrement dit une valeur propre de $A$ est nécessairement un imaginaire pur).

---

**R.52** Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

$A$ est diagonalisable si et seulement si $A$ possède une autre valeur propre que 0.

$A$ est diagonalisable si et seulement si $A^2$ n'est pas nulle.

$A$ est diagonalisable si et seulement si la trace de $A$ n'est pas nulle.

---

**R.53** $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

- 1 est valeur propre de $A$.
- Si $\lambda$ est un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de $A$ : $|\lambda| \leqslant 1$.
- Si de plus $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} > 0$, 1 est la seule valeur propre de $A$ dans $\mathbb{C}$ de module 1 et le sous-espace propre

associé est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

---

**R.54** **Disques de Gerschgorin.** $n \in [\![2, +\infty[\![$. $A = (a_{i,j})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout $i$ élément de $[\![1,n]\!]$, on pose : $r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$ et $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leqslant r_i\}$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}\, A \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i.}$$

En utilisant $\mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Sp}\, {}^t A$ on obtient encore un résultat du même type. $r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$ est simplement remplacé par

$r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{j,i}|$.

---

**R.55** $\alpha$ et $\beta$ sont deux éléments de $\mathbb{K}$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose $n \geqslant 2$ et $\beta \neq 0$.

1. $\mathrm{Sp}\, A = \{\alpha - \beta, \alpha - \beta + n\beta\}$.
2. $A$ est diagonalisable.
3. SEP $(A, \alpha - \beta)$ est l'hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ d'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

et SEP $(A, \alpha - \beta + n\beta)$ est la droite vectorielle engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

---

**R.56** $f$ est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension $n$.

$\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_s$ sont les valeurs propres distinctes de $f$. On suppose que $s \geqslant 2$.

1. Pour tout $i$ dans $[\![1, s]\!]$, SEP $(f, \lambda_i)$ et $\displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s}$ SEP $(f, \lambda_j)$ sont suplémentaires dans $E$.

Pour tout $i$ dans $[\![1, s]\!]$, on note $p_i$ la projection sur SEP $(f, \lambda_i)$ parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s}$ SEP $(f, \lambda_j)$.

$p_1$, $p_2$, ..., $p_s$ sont **les projecteurs spectraux de** $f$.

2. a) $\boxed{\forall r \in \mathbb{N},\ f^r = \lambda_1^r\, p_1 + \lambda_2^r\, p_2 + \cdots + \lambda_p^r\, p_s = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^r\, p_i}$.

*Les puristes valideront ce qui précède avec $r \in \mathbb{N}^*$.*

b) Si $Q$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$, $\boxed{Q(f) = \sum_{i=1}^{s} Q(\lambda_i)\, p_i.}$

3. Soit $j$ un élément de $[\![1, s]\!]$.

Il existe un élément $L_j$ de $\mathbb{K}_{s-1}[X]$ et un seul tel que $\forall i \in [\![1, s]\!],\ L_j(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

$\boxed{p_j = L_j(f)}$. $p_j$ est donc un polynôme de $f$.

---

## Niveau 3

---

**R.57** $f$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ sur $\mathbb{K}$ de dimension $n$.

$F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, de dimension non nulle, stable par $f$.

Si $f$ est diagonalisable, la restriction de $f$ à $F$ définit un endomorphisme de $F$ qui est diagonalisable.

---

**R.58** $E$ est un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). $G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

$f$ est un endomorphisme **diagonalisable** de $E$. $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_p$ sont les $p$ valeurs propres de $f$.

$G$ est stable par $f$ si et seulement si $G = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} G_k$ où $G_1$, $G_2$, ..., $G_p$ sont p sous-espaces respectifs de SEP $(f, \lambda_1)$, SEP $(f, \lambda_2)$, ..., SEP $(f, \lambda_p)$.

---

**R.59** $E$ est un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

$f$ est un endomorphisme **diagonalisable** de $E$. $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_p$ sont les $p$ valeurs propres de $f$.

$\mathcal{C}(f)$ est le commutant de $f$ donc $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(|) f \circ g = g \circ f\}$.

1. $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Soit $g$ un endomorphisme $E$.

$g$ commute avec $f$ si et seulement si $g$ laisse stable SEP $(f, \lambda_1)$, SEP $(f, \lambda_2)$, ..., SEP $(f, \lambda_p)$.

3. $\dim \mathcal{C}(f) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim \text{SEP } (f, \lambda_k)$.

Même chose pour une matrice diagonalisable.

---

**R.60** $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension $n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). $f$ et $g$ sont deux endomorphismes **diagonalisables** de $E$.

1. $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si il existe une base de $E$ constituée de vecteurs propres communs à $f$ et à $g$.

2. $f \circ g = g \circ f$ si et seulement $f$ et $g$ se diagonalisent dans la même base.

"Même chose" pour les matrices.

---

**R.61** $E$ est un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

$f$ est un endomorphisme **diagonalisable** de $E$. $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_p$ sont les $p$ valeurs propres de $f$.

1. $\{P(f)\ ;\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{p-1})$ est une base de $\{P(f)\ ;\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.
3. $\dim\Big(\{P(f)\ ;\ P \in K[X]\}\Big) = p$.

Même chose pour matrice diagonalisable.

---

**R.62** $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension non nulle $n$. $f$ est un endomorphisme de $E$.

$A$ est la matrice de $f$ dans une base $\mathcal{B}$ de $E$.

Un hyperplan de $E$ d'équation $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \cdots + a_n\, x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$ est stable par $f$ si et seulement si $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^t A$.

---

**R.63** $E$ est de dimension $n$ non nulle et $f$ est un endomorphisme de $E$ dont les valeurs propres distinctes sont $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_p$.

$\boxed{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k) \text{ est un polynôme annulateur de } f}$.

Même chose pour une matrice.

---

**R.64** $E$ est de dimension $n$ non nulle et $f$ est un endomorphisme de $E$.

1. $\boxed{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } f \text{ possède un polynôme annulateur scindé à racine simple}}$.

2. $f$ est diagonalisable si et seulement si il existe des scalaires $\gamma_1$, $\gamma_2$, ..., $\gamma_r$ **deux à deux distincts** tels que $(f - \gamma_1\ \mathrm{Id}_E) \circ (f - \gamma_2\ \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (f - \gamma_r\ \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Même chose pour une matrice.

---

**R.65** $E$ est de dimension $n$ non nulle et $f$ est un endomorphisme de $E$.

$\boxed{\text{1. } f \text{ est trigonalisable si et seulement si } f \text{ possède un polynôme annulateur scindé}}$.

2. $f$ est trigonalisable si et seulement si il existe des scalaires $\gamma_1$, $\gamma_2$, ..., $\gamma_p$ tels que $(f - \gamma_1\ \mathrm{Id}_E) \circ (f - \gamma_2\ \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (f - \gamma_p\ \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Même chose pour une matrice.

---

**R.66** 1. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n$ non nulle $\boxed{\text{sur } \mathbb{C}}$ est trigonalisable.

2. Toute matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

---

**R.67** $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \geqslant 0 \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

• 1 est valeur propre de $A$.

• Si $\lambda$ est un élément de $\mathbb{C}$ valeur propre de $A$ : $|\lambda| \leqslant 1$.

• Si $\lambda$ est une valeur propre de $A$ dans $\mathbb{C}$ de module 1, il existe un élément $r$ de $\mathbb{N}^*$ tel que $\lambda$ soit une racine $r^{\text{ème}}$ de l'unité.

---

**R.68** $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On rappelle que $A$ possède au moins une valeur propre et on appelle **rayon spectral** de $A$ le réel noté $\rho(A)$ et égal à $\underset{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A}{\mathrm{Max}} |\lambda|$.

La suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge ver $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ si et seulement si $\rho(A) < 1$.

---

**R.69** **Ovales de Cassini**. $n \in [\![2, +\infty[\![$. $A = (a_{i,j})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout $i$ élément de $[\![1,n]\!]$, on pose : $r_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

Pour tout $(i,j)$ élément de $[\![1,n]\!]^2$ on pose : $C_{ij} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}|\,|z - a_{j,j}| \leqslant r_i\, r_j\}$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}\, A \subset \bigcup_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \\ i \neq j}} C_{i,j}} \quad \text{où} \quad \boxed{\mathrm{Sp}\, A \subset \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant n} C_{i,j}}$$

En utilisant $\mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Sp}\, {}^t A$ on obtient encore un résultat du même type.

---