Problème.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. On note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E, soit $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. On rappelle que E^* **est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension** n.
Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de E^*.

I Un premier exemple.

Dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$ et (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère les trois formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$, ψ_1, ψ_2 et ψ_3, définies par :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_1(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \psi_2(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ \psi_3(x) = x_3 \end{array} \right.$$

1. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Calculer, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2 + \gamma\psi_3)(e_i)$.
2. Montrer que (ψ_1, ψ_2, ψ_3) est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.
3. Montrer qu'il existe un unique triplet (u_1, u_2, u_3) de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, que l'on déterminera, tel que
$$\psi_i(u_j) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$
4. Vérifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

II Base duale.

$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ désigne une base de E.

1. Pour tout entier k, $k \leqslant n$, justifier qu'il existe une unique forme linéaire sur E, notée φ_k, telle que
$$\varphi_k(e_k) = 1 \text{ et pour } j \neq k,\ \varphi_k(e_j) = 0.$$
Pour $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, préciser $\varphi_k(x)$ et vérifier que : $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) e_k$.
2. Montrer que la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de E^* ; on la note $\mathcal{B}^*$ et on l'appelle **base duale** de $\mathcal{B}$.
Montrer que tout φ de E^* s'écrit
$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\varphi_i.$$
3. Montrer que si V désigne la matrice colonne des coordonnées de $\varphi \in E^*$ dans $\mathcal{B}^*$ et X la matrice colonne des coordonnées de $x \in E$ dans $\mathcal{B}$ alors $\varphi(x) = {}^tV\,X$.
4. **Changements de bases.**
   (a) Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (u_1, \ldots, u_n)$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (donc $u_h = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{ih} e_i$).
   On note $\mathcal{B}^* = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ et $\mathcal{B}'^* = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ les bases duales de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}'^*$ (donc $\psi_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} q_{kj}\varphi_k$).
   En utilisant II 3., exprimer $\psi_j(u_h)$ en fonction des q_{kj} et p_{kh}.
   En déduire que ${}^tQ\,P = I_n$. Déterminer alors Q en fonction de P.
   (b) On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit sur $GL_n(\mathbb{R})$ l'application g par :
   $$\text{pour } P \in GL_n(\mathbb{R}),\ g(P) = {}^tP^{-1}.$$
   Montrer que g est une bijection de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ et en déduire que, pour toute base $\mathcal{F}$ de E^*, il existe une et une seule base $\mathcal{C}$ de E telle que $\mathcal{C}^* = \mathcal{F}$.

(c) *Application :* Soit

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A l'aide des résultats obtenus dans la partie I, donner, sans nouveaux calculs, la matrice Q^{-1}.

5. **Des produits scalaires.** *Question facultative...*

(a) On définit sur $E^* \times E^*$ l'application $< .,. >$ par :

$$\forall(\varphi, \psi) \in (E^*)^2, \quad < \varphi, \psi >= \sum_{k=1}^{n} \varphi(e_k)\psi(e_k).$$

Montrer que $< .,. >$ définit un produit scalaire sur E^* et que la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base ortonormée de E^*.

(b) On définit sur $E \times E$ l'application $(.|.)$ par

$$\forall(x, y) \in E^2, \quad (x|y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\varphi_k(y).$$

Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E et que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée pour ce produit scalaire.

(c) Retrouver ainsi les coordonnées de $\varphi \in E^*$ et de $x \in E$, obtenues en II 2. et II 1.

III Une application à $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit n un entier naturel non nul. On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Pour $j \in \mathbb{N}$, $P^{(j)}$ désigne la dérivée j-ième de P.
Pour k entier naturel, on définit les polynômes P_k par :

$$P_0 = 1 \text{ et, pour } k \text{ entier compris entre 1 et } n,\ P_k(X) = \frac{1}{k!}X(X-k)^{k-1}$$

1. (a) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E.

   (b) Montrer que pour $k \geqslant 1$, $P_k'(X) = P_{k-1}(X-1)$.
   En déduire pour $k \geqslant j \geqslant 1$, une relation entre $P_k^{(j)}(X)$ et $P_{k-j}(X-j)$.

2. Pour j entier, $0 \leqslant j \leqslant n$, on définit sur E l'application φ_j par

$$\forall P \in E,\ \varphi_j(P) = P^{(j)}(j).$$

Montrer que $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ est la base duale de $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$.
Application : Justifier l'existence et l'unicité de $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^1 P(x)e^x\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k P^{(k)}(k).$$

3. (a) Justifier que tout polynôme P de E s'écrit

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(k)P_k(X).$$

(b) En appliquant (a) au polynôme $P(X+y)$ pour y réel fixé, exprimer, pour x et y réels, $P(x+y)$ en fonction des $P^{(k)}(k+y)$ et $P_k(x)$.

(c) On choisit $P = P_n$. Montrer que

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k}(y).$$

(d) On choisit $P = X^n$. Montrer que

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x+y)^n = y^n + x\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(x-k)^{k-1}(y+k)^{n-k}$$