D.M. 4

Pour samedi 22 octobre 2011

Sujet 1 : I+II+III Q1. Le reste est facultatif. **Sujet 2 : II+III+IV. La partie V est facultative**

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n ($n \in [\![3, +\infty[\![$). On note 0_E l'élément neutre de E pour l'addition, et Id_E l'application identité de E.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des endomorphismes u de E vérifiant la propriété suivante :

$$\boxed{\text{il existe un vecteur } x_0 \text{ de } E \text{ tel que la famille } (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)) \text{ soit une base de } E \quad \text{(P).}}$$

On rappelle que si v est un endomorphisme de E et si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$:

$$(PQ)(v) = P(v) \circ Q(v) = Q(v) \circ P(v)$$

(ceci se généralise à un produit de r polynômes).

PARTIE I Un exemple

Dans cette partie seulement, $n = 3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. On définit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M.

Q1 Montrer que f est un élément de $\mathcal{S}$.

Q2 Calculer $M^3 + M^2 + M$. Qu'en déduire pour M et f ?

Q3 Montrer que -1 est valeur propre de f et donner une base du sous-espace propre associé.

Q4 Déterminer $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E)$. Vérifier que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ et que $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ est stable par f.

Q5 Montrer qu'il existe une base (u_1, u_2, u_3), avec $u_2 = e_1 - e_3$, et dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (on commencera par faire une petite analyse).

Q6 Diagonaliser f (on donnera une base de E constituée de vecteurs propres de f).

PARTIE II Quelques propriétés des éléments de $\mathcal{S}$.

Q1 **Une caractérisation matricielle des éléments de $\mathcal{S}$.**

a) Soit u un élément de $\mathcal{S}$, et x_0 un vecteur de E tel que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

Montrer qu'il existe n nombres complexes a_0, a_1, ..., a_{n-1} tels que :

$$u^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 u(x_0) + \ldots + a_{n-1} u^{n-1}(x_0)$$

Donner, en fonction de a_0, a_1, ..., a_{n-1}, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

b) Réciproquement, on considère un endomorphisme u de E et une base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E telle que :

$$M_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrer que u est un élément de $\mathcal{S}$ et donner un vecteur x_0 tel que $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

On note désormais $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ la matrice écrite dans la question II 1 b) (on parle de **matrice compagnon**).

Q2 **Rang d'un élément de $\mathcal{S}$.**

Soit u un élément de $\mathcal{S}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$.

Montrer successivement que :

a) $\operatorname{rg} u \geqslant n - 1$

b) Montrer que si $a_0 = 0$ la famille $\big(u(x_0), u^2(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0), u^n(x_0)\big)$ est liée (*question ajoutée pour aider et qui ne figure pas dans la correction*).

Montrer que si $a_0 \neq 0$ la famille $\big(u(x_0), u^2(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0), u^n(x_0)\big)$ est libre (*question ajoutée pour aider et qui ne figure pas dans la correction*).

En déduire que u est un automorphisme si et seulement si $a_0 \neq 0$ et préciser le rang de u (deux cas).

Q3 **Polynôme annulateur d'un élément de $\mathcal{S}$**

Dans toute cette question, on considère un élément u de $\mathcal{S}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$.

a) Montrer que la famille d'endomorphismes $(\mathrm{Id}_E, u, u^2, \ldots, u^{n-1})$ est une famille libre d'éléments de $\mathcal{L}(E)$.

En déduire que si P est un polynôme annulateur non nul de u, alors $\deg P \geqslant n$ (on pourra raisonner par l'absurde).

b) On considère l'endomorphisme $f = u^n - a_{n-1}\, u^{n-1} - a_{n-2}\, u^{n-2} - \cdots - a_1\, u - a_0\, \mathrm{Id}_E$.

Montrer que $f(x_0) = 0_E$ et $f(u(x_0)) = 0_E$ (*pour aider ...*). Calculer l'image par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

En déduire que le polynôme : $P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - a_{n-2}X^{n-2} - \cdots - a_1 X - a_0$. est un polynôme annulateur de u de degré exactement n.

On appellera désormais polynôme associé à $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ le polynôme P défini ci-dessus.

PARTIE III Éléments de $\mathcal{S}$ et diagonalisation

Q1 **Condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément de $\mathcal{S}$ soit diagonalisable.**

Dans cette question, on considère un élément u de $\mathcal{S}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, et on note P le polynôme associé à cette matrice.

a) Soit λ une racine de P. On note $Q(X)$ le polynôme défini par $P(X) = (X - \lambda)\, Q(X)$. Montrer que si λ n'était pas valeur propre de u, alors $Q(X)$ serait un polynôme annulateur de u (on pourra alors remarquer que $u - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ est inversible).

En utilisant le résultat de la question II 3.a), montrer que λ est valeur propre de u.

Montrer que $\boxed{\text{les}}$ racines de P sont $\boxed{\text{les}}$ valeurs propres de u.

b) En déduire que si P possède n racines distinctes, alors u est diagonalisable.

c) Réciproquement, on suppose que u est diagonalisable et on note α_1, ..., α_p les valeurs propres de u distinctes deux à deux. On se propose de montrer $H = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_p)$ est un polynôme annulateur de u.

Montrer que si i appartient à $[\![1, p]\!]$ et si t est élément de SEP (u, α_i) alors $H(u)(t) = 0_E$ $(u(t) = \alpha_i\, t$ donc ...).

En déduire que $\forall x \in E,\ H(u)(x) = 0_E$. Conclure.

Déduire de ce qui précède que u possède n valeurs propres distinctes.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ **Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit un élément de $\mathcal{S}$ diagonalisable**.

On considère désormais un endomorphisme u (n'appartenant pas nécessairement à $\mathcal{S}$), diagonalisable, avec n valeurs propres distinctes λ_1, ..., λ_n. On pose : e_1, ..., e_n des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1, ..., λ_n. On note enfin $x_0 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$

a) Calculer $u^k(x_0)$ pour tout entier k compris entre 1 et $n - 1$ en fonction des vecteurs e_1, ..., e_n et des nombres complexes λ_1, ..., λ_n.

b) On considère n nombres complexes β_0, β_1, ..., β_{n-1} tels que :

$$\beta_0 x_0 + \beta_1 u(x_0) + \dots + \beta_{n-1} u^{n-1}(x_0) = 0_E$$

et on définit le polynôme $Q(X) = \beta_0 + \beta_1 X + \dots + \beta_{n-1} X^{n-1}$.

Montrer que $Q(\lambda_j) = 0$ pour tout entier j compris entre 1 et n (utiliser a) pour travailler sur une double somme).

Que peut-on en déduire concernant le polynôme Q ?

c) Montrer que u est élément de $\mathcal{S}$. Conclure.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ On définit la matrice $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme associé à M_1, et déterminer ses racines.

b) M_1 est-elle diagonalisable ?

PARTIE IV Etude d'un cas particulier

Dans toute cette partie, on notera M_n la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} \\ 1 & 0 & & & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

On note P_n le polynôme associé à la matrice M_n tel qu'il est définit dans la question II 3 b), c'est à dire :

$$P_n(X) = X^n - \frac{1}{n}\left(X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1\right)$$

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Calculer $P_n(1)$ et $P_n'(1)$. Qu'en déduire pour 1 ?

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Soit z une racine (éventuellement complexe) de P_n.

Montrer que $n\,|z|^n \leqslant |z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \cdots + |z| + 1$.

En raisonnant par l'absurde prouver que $|z| \leqslant 1$.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ Soit z une racine de P_n de module 1. Il existe θ dans $[-\pi;\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$.

a) Montrer que $n = z^{-1} + z^{-2} + \cdots z^{-(n-1)} + z^{-n}$. En déduire que $n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\big((k-n)\theta\big)$.

b) En déduire que $\theta = 0$ et qu'ainsi $z = 1$.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ On définit le polynôme Q_n par : $Q_n(X) = (X-1)P_n(X)$.

a) Simplifier le polynôme Q_n.

b) En déduire que toutes les racines de P_n sont simples.

$\boxed{\textbf{Q5}}$ Montrer que la matrice M_n est diagonalisable.

Donner les dimensions des sous-espaces propres de M_n ainsi qu'une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

PARTIE V Un exemple où P possède deux racines multiples

Dans toute cette partie, u désignera un élément de $\mathcal{S}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est $M(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, et on note P le polynôme associé à cette matrice.

On suppose qu'il existe deux nombres complexes distincts α et β et deux entiers naturels p et q supérieurs ou égaux à 2 tels que :

$$P(X) = (X-\alpha)^p(X-\beta)^q \qquad \text{et} \qquad p+q=n$$

$\boxed{\textbf{Q0}}$ F et G sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimension r et s. On suppose que r et s ne sont pas nuls et on se propose de montrer que $F \times G$ est un espace vectoriel de dimension égale à $\dim F + \dim G$.

Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ une base de F et $(w_1, w_2, \ldots, w_s)$ une base de G.

Montrer que $\Big((v_1, 0_G), (v_2, 0_G), \ldots, (v_r, 0_G), (0_F, w_1), (0_F, w_2), \ldots, (0_F, w_s)\Big)$ est une base de $F \times G$. Conclure.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ **Un isomorphisme d'espaces vectoriels**

On considère l'application Ψ de $\mathbb{C}_{p-1}[X] \times \mathbb{C}_{q-1}[X]$ dans $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$ définie par :

$$\forall (Q,R) \in \mathbb{C}_{p-1}[X] \times \mathbb{C}_{q-1}[X],\ \Psi(Q,R) = (X-\beta)^q Q(X) + (X-\alpha)^p R(X).$$

a) Vérifier que Ψ est une application linéaire de $\mathbb{C}_{p-1}[X] \times \mathbb{C}_{q-1}[X]$ dans $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$ (*attention les éléments de l'espace vectoriel* $\mathbb{C}_{p-1}[X] \times \mathbb{C}_{q-1}[X]$ *sont des couples de polynômes*).

b) On considère $(Q,R) \in \operatorname{Ker} \Psi$. En étudiant l'ordre de multiplicité de la racine α dans Q, montrer que $Q = 0$, puis que $R = 0$.

Que dire alors de Ψ ?

c) Montrer alors qu'il existe deux polynômes A et B appartenant respectivement à $\mathbb{C}_{p-1}[X]$ et à $\mathbb{C}_{q-1}[X]$ tels que :

$$(X-\beta)^q\, A(X) + (X-\alpha)^p\, B(X) = A(X)\,(X-\beta)^q + B(X)\,(X-\alpha)^p = 1$$

Q2 **Une somme directe** On note $E_\alpha = \operatorname{Ker}\big((u-\alpha\,\mathrm{Id}_E)^p\big)$ et $E_\beta = \operatorname{Ker}\big((u-\beta\,\mathrm{Id}_E)^q\big)$.

a) Soit $x \in E_\alpha \cap E_\beta$. En utilisant l'endomorphisme $A(u)\circ(u-\beta\,\mathrm{Id}_E)^q + B(u)\circ(u-\alpha\,\mathrm{Id}_E)^p$, montrer que $x = 0_E$.

b) Soit $x \in E$. On pose $x_1 = \Big((u-\beta\,\mathrm{Id}_E)^q \circ A(u)\Big)(x)$ et $x_2 = \Big((u-\alpha\,\mathrm{Id}_E)^p \circ B(u)\Big)(x)$. Montrer que $x_1 \in E_\alpha$ et que $x_2 \in E_\beta$, puis calculer $x_1 + x_2$.

c) En déduire que $E = E_\alpha \oplus E_\beta$.

d) Vérifier que E_α et E_β sont deux espaces vectoriels stables par u.

Q3 a) Montrer qu'il existe un vecteur $t_0 \in E_\alpha$ tel que $(u-\alpha\,\mathrm{Id}_E)^{p-1}(t_0) \neq 0$. On pourra, après l'avoir justifié, utiliser le fait que $(X-\alpha)^{p-1}(X-\beta)^q$ n'est pas un polynôme annulateur de u.

b) Vérifier que $\big(t_0, (u-\alpha\,\mathrm{Id}_E)(t_0), \ldots, (u-\alpha\,\mathrm{Id}_E)^{p-1}(t_0)\big)$ est une famille libre de E_α. En déduire un minorant de $\dim(E_\alpha)$

c) Donner de même un minorant de $\dim(E_\beta)$, puis calculer les dimensions de E_α et E_β.

Q4 En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est égale à :

$$\begin{pmatrix}
\alpha & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\
1 & \alpha & 0 & & & & & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & 1 & \alpha & 0 & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 0 & \beta & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & & & & \ddots & \ddots & \beta & 0 \\
0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & \beta
\end{pmatrix}$$

La diagonale comportant p fois le nombre α et q fois le nombre β.