PARTIE I

Q1 Posons $x_0 = e_1$. $f(x_0) = e_2$ et $f^2(x_0) = e_3$ car $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est une base de E. $\underline{f \in \mathcal{S}}$.

Q2 $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $M^3 = MM^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$M^3 + M^2 + M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3.$$

$\underline{M^3 + M^2 + M = -I_3}$ Ainsi $M^3 + M^2 + M + I_3 = 0$.

Q3 Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$.

$f(u) = -u \Leftrightarrow (f + Id_E)(u) = 0_E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$

$\underline{\text{Ainsi } -1 \text{ est valeur propre de } f \text{ et } SEP(f, -1) = Vect(e_1 + e_3)}$

Q4
- $Ker(f + Id_E) = Vect(e_1 + e_3)$
- $M_{\mathcal{B}}(f^2 + Id_E) = M^2 + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$rg(f^2 + Id_E) = 1$ car $rg(M^2 + I_3) = \dim Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \dim Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1$.

Alors $\dim Ker(f^2 + Id_E) = 2$.

Observons que $(f^2 + Id_E)(e_1) = (f^2 + Id_E)(e_3)$; ainsi $e_1 - e_3 \in Ker(f^2 + Id_E)$.

$(f^2 + Id_E)(e_1) + (f^2 + Id_E)(e_2) = 0_E$; ainsi $e_1 + e_2 \in Ker(f^2 + Id_E)$.

$(e_1 - e_3, e_1 + e_2)$ est une famille d'éléments de $Ker(f^2 + Id_E)$, de cardinal 2 et cette famille est clairement libre. Comme $\dim Ker(f^2 + Id_E) = 2$:

$(e_1 - e_3, e_1 + e_2)$ est une base de $Ker(f^2 + Id_E)$.

(e_1+e_3) est une base de $\ker(f+\mathrm{Id}_E)$ et (e_1-e_3, e_1+e_2) est une base de $\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$.

Pour montrer que $E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$ il suffit de prouver que $(e_1+e_3, e_1-e_3, e_1+e_2)$ est une base de E.

$\dim E=3$ et $\mathrm{card}\,(e_1+e_3, e_1-e_3, e_1+e_2)=3$. Pour montrer que $(e_1+e_3, e_1-e_3, e_1+e_2)$ est une base de E, il suffit de prouver que cette famille est libre.

Soit $(\alpha,\beta,\delta)\in\mathbb{C}^3$ tel que $\alpha(e_1+e_3)+\beta(e_1-e_3)+\delta(e_1+e_2)=0_E$.

$(\alpha+\beta)e_1+\delta e_2+(\alpha-\beta)e_3=0_E$. Ainsi par liberté de (e_1,e_2,e_3) :

$\alpha+\beta=\delta=\alpha-\beta=0$ donc $\alpha=\beta=\delta=0$.

Finalement $(e_1+e_3, e_1-e_3, e_1+e_2)$ est une base de E donc $\underline{\underline{E=\ker(f+\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)}}$.

<u>Exercice 1</u>.. Retrouver ce résultat par analyse/synthèse.

<u>Exercice 2</u>.. Retrouver ce résultat en remarquant que $(f+\mathrm{Id}_E)\circ(f^2+\mathrm{Id}_E)=0_{\mathcal{L}(E)}$, $(f^2+\mathrm{Id}_E)\circ(f+\mathrm{Id}_E)=0_{\mathcal{L}(E)}$ et que $1=(X+1)(\frac{1}{2}X-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(X^2+1)$!

Q5 Supposons qu'une telle base (u_1,u_2,u_3) existe.

$$\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$f(u_1)=-u_1$ donc $u_1\in SEP(f,-1)=\mathrm{Vect}(e_1+e_3)$

$u_2=e_1-e_3$! $f(u_2)=u_3$ donc $u_3=f(u_2)=f(e_1)-f(e_3)=e_1+2e_2+e_3$

Dès lors posons : $u_1=e_1+e_3$, $u_2=e_1-e_3$ et $u_3=f(u_2)=e_1+2e_2+e_3$.

$f(u_1)=-u_1$. $f(u_2)=u_3$; $f(u_3)=f^2(u_2)=-e_1+e_3=-(e_1-e_3)=-u_2$

$$M^2=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-1&0\\1&-1&0\end{pmatrix} ; \quad M^2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Vrai aussi car $u_2\in\ker(f^2+\mathrm{Id}_E)$!

Posons $\mathcal{B}'=(u_1,u_2,u_3)$.

Soit $(\alpha,\beta,\delta)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha u_1+\beta u_2+\delta u_3=0_E$.

$\alpha(e_1+e_3)+\beta(e_1-e_3)+\delta(e_1+2e_2+e_3)=0_E$.

$(\alpha+\beta+\delta)e_1+2\delta e_2+(\alpha-\beta+\delta)e_3=0_E$. $\alpha+\beta+\delta=2\delta=\alpha-\beta+\delta=0$.

$\delta=0$ et $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=0\end{cases}$; $\alpha=\beta=\delta=0$. Ainsi (u_1,u_2,u_3) est une famille libre de cardinal 3 de E qui est de dimension 3. (u_1,u_2,u_3) est une base de E.

(u_1,u_2,u_3) est une base de E et $M_{(u_1,u_2,u_3)}(f)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

Q6 • $-1\in Sp(f)$ et $SEP(f,-1)=Vect(e_1+e_3)$.

• $M^3+M^2+M=-I_3$; $M^3+M^2+M+I_3=0_{M_3(\mathbb{C})}$; $f^3+f^2+f+Id_E=0_{\mathcal{L}(E)}$.

$H=X^3+X^2+X+1$ est un polynôme annulateur de f

$H=(X+1)(X^2+1)$. Les zéros de H sont -1, i et $-i$. $Sp(f)\subset\{-1,i,-i\}$.

Soit $u=xe_1+ye_2+ze_3\in E$.

$$f(u)=iu\iff\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\begin{cases}-z=ix\\x-z=iy\\y-z=iz\end{cases}\iff\begin{cases}z=-ix\\iy=x+ix=(1+i)x=i(1-i)x\\y-(1+i)z=0\end{cases}$$

$$f(u)=iu\iff\begin{cases}z=-ix\\y=\frac{1}{i}(1+i)x=(1-i)x\\0=y-(1+i)z=(1-i)x-(1+i)(-ix)=0\end{cases}\iff\begin{cases}z=-ix\\y=(1-i)x\end{cases}$$

Alors $i\in Sp(f)$ et $SEP(f,i)=Vect(e_1+(1-i)e_2-ie_3)$.

(*) Par conjugaison on obtient sans difficulté :

$-i\in Sp(f)$ et $SEP(f,-i)=Vect(e_1+(1+i)e_2+ie_3)$.

* $MX=iX\iff\overline{M}\,\overline{X}=-i\overline{X}\iff M\overline{X}=-i\overline{X}$

M est à coeff. réels

$\mathcal{B}_1=(e_1+e_3)$ est une base de $SEP(f,-1)$, $\mathcal{B}_2=(e_1+(1-i)e_2-ie_3)$ est une base de $SEP(f,i)$ et $\mathcal{B}_3=(e_1+(1+i)e_2+ie_3)$ est une base de $SEP(f,-i)$.

Comme $E=SEP(f,-1)\oplus SEP(f,i)\oplus SEP(f,-i)$: $\mathcal{B}'=$ "$\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cup\mathcal{B}_3$" est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres -1, i et $-i$.

$(e_1+e_3,\ e_1+(1-i)e_2-ie_3,\ e_1+(1+i)e_2+ie_3)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres $-1, i, -i$.

$M_{\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&i&0\\0&0&-i\end{pmatrix}$. $P=Pas(\mathcal{B},\mathcal{B}')=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1-i&1+i\\1&-i&i\end{pmatrix}$. **Exercice** : trouver P^{-1}.

PARTIE II Quelques propriétés des éléments de $\mathcal{S}$.

Q1 a) $u^n(x_0) \in E$ et $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Ainsi : $\exists! (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $u^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 u(x_0) + \dots + a_{n-1} u^{n-1}(x_0)$.

$\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $u(u^k(x_0)) = u^{k+1}(x_0)$ et $u(u^{n-1}(x_0)) = a_0 x_0 + a_1 u(x_0) + \dots + a_{n-1} u^{n-1}(x_0)$.

Alors la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est : $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

b) $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ et $M_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$

Notons que :
$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $u(e_k) = e_{k+1}$. $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $e_k = u(e_{k-1}) = u^2(e_{k-2}) = \dots = u^{k-1}(e_1)$ ce qui vaut aussi pour $k=1$.
Alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $u^{k-1}(e_1) = e_k$. Ainsi $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) = (e_1, u(e_1), \dots, u^{n-1}(e_1))$.

Posons $x_0 = e_1$. $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E. $u \in \mathcal{S}$.

Q2 a) $E = \mathrm{Vect}(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$
$u(E) = \mathrm{Vect}(u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^n(x_0))$.
$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0), u^n(x_0))$.

$(u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une famille d'éléments de $\mathrm{Im}\, u$; de plus cette famille est libre comme sous-famille de la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$.
$(u(x_0), u^2(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une famille libre de $\mathrm{Im}\, u$ de cardinal $n-1$.

Ainsi $\dim \mathrm{Im}\, u \geqslant n-1$. $\mathrm{rg}\, u \geqslant n-1$.

b) • Supposons $a_0 = 0$. Alors $u^n(x_0) = a_1 u(x_0) + \dots + a_{n-1} u^{n-1}(x_0)$.

Alors $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(u(x_0),\dots,u^{n-1}(x_0),u^n(x_0)) = \mathrm{Vect}(u(x_0),\dots,u^{n-1}(x_0))$.

Alors $\dim \mathrm{Im}\, u \leq n-1$. $\mathrm{Im}\, u$ est strictement contenue dans E.

u n'est pas bijective ; u n'est pas un isomorphisme. $n-1 \leq \mathrm{rg}(u) < n$. $\underline{\underline{\mathrm{rg}(u) = n-1}}$

• Supposons $a_0 \neq 0$. Montrons que $(u(x_0), u^2(x_0),\dots, u^n(x_0))$ est libre.

Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\alpha_1 u(x_0) + \alpha_2 u^2(x_0) + \dots + \alpha_n u^n(x_0) = 0_E$.

$\alpha_1 u(x_0) + \alpha_2 u^2(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_0) + \alpha_n (a_0 x_0 + a_1 u(x_0) + \dots + a_{n-1} u^{n-1}(x_0)) = 0_E$.

$\alpha_n a_0 x_0 + (\alpha_1 + \alpha_n a_1) u(x_0) + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n a_{n-1}) u^{n-1}(x_0) = 0_E$.

Comme $(x_0, u(x_0),\dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre : $\alpha_n a_0 = \alpha_1 + \alpha_n a_1 = \dots = \alpha_{n-1} + \alpha_n a_{n-1} = 0$.

Comme $a_0 \neq 0$: $\alpha_n = 0$ et ainsi $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = \alpha_n = 0$.

Alors $(u(x_0),\dots,u^n(x_0))$ est une famille libre de E de cardinal n.

Comme $\dim E = n$: $(u(x_0),\dots,u^n(x_0))$ est une base de E.

u transforme la base $(x_0, u(x_0),\dots, u^{n-1}(x_0))$ en une base de E ; u est donc un isomorphisme de E. $\underline{\underline{\mathrm{rg}\, u = n}}$.

Finalement $\underline{\underline{\text{u est un isomorphisme de E si et seulement si } a_0 \neq 0}}$.

(Q3) a) Soit $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x_0) = 0_E$. Comme $(x_0, u(x_0),\dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre : $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

$\underline{\underline{(\mathrm{Id}_E, u, u^2,\dots,u^{n-1}) \text{ est libre}}}$.

Soit P un polynôme annulateur de u différent de $0_{\mathbb{C}[X]}$.

$\exists r \in \mathbb{N}, \exists (b_0,b_1,\dots,b_r) \in \mathbb{C}^{r+1}$, $P = \sum_{k=0}^{r} b_k X^k$ et $b_r \neq 0$. $\deg P = r$.

Supposons $r \leq n-1$. $\sum_{k=0}^{r} b_k u^k = P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

$(Id_E, u, \dots, u^r)$ est une sous-famille de la famille libre $(Id_E, u, \dots, u^{n-1})$.

Ainsi $(Id_E, u, \dots, u^r)$ est libre.

Par conséquent $\sum_{k=0}^{r} b_k u^k$ donne $b_0 = b_1 = \dots = b_r = 0$ ce qui contredit $b_r \neq 0$.

Ainsi si P est un polynôme annulateur non nul de u : $\deg P \geqslant n$.

b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

$$f(u^k(x_0)) = u^{n+k}(x_0) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(u^k(x_0)) = u^{k+n}(x_0) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^{i+k}(x_0)$$

$$f(u^k(x_0)) = u^{k+n}(x_0) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^{k+i}(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ u \text{ est linéaire !}}}{=} u^k\Big(\underbrace{u^n(x_0) - \sum_{i=0}^{n-1} u^i(x_0)}_{=0_E}\Big) = u^k(0_E) = 0_E$$

$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ f(u^k(x_0)) = 0_E$.

Alors f et $0_{\mathcal{L}(E)}$ coïncident sur la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$.

Comme f et $0_{\mathcal{L}(E)}$ sont deux endomorphismes de E : $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Donc $u^n - a_{n-1}u^{n-1} - \dots - a_1 u - a_0 Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1 X - a_0$ est un polynôme annulateur de u de degré n.

Remarque. P est le polynôme minimal de u.

PARTIE III

(Q1) a) $P(u) = (u - \lambda Id_E) \circ \varphi(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Supposons que $\lambda \notin Sp(u)$.

Alors $u - \lambda Id_E$ est injective donc bijective car $u - \lambda Id_E \in \mathcal{L}(E)$ et $\dim E < +\infty$.

En composant l'égalité de la première ligne par $(u - \lambda Id_E)^{-1}$ il vient :

$\varphi(u) = (u - \lambda Id_E)^{-1} \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\varphi(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Notons que φ n'est pas nul car P ne l'est pas. Alors φ est un polynôme annulateur non nul de u et $\deg \varphi = n-1$. Ceci est impossible d'après II 3a.
$\mathcal{E}$ $\deg P = n$.

Ainsi toute racine de P est une valeur propre de u.

P étant un polynôme annulateur de u les valeurs propres de u sont des racines de P.

Ainsi les racines de P sont les valeurs propres de u.

b) Supposons que P possède n racines distinctes. Alors u possède n valeurs propres distinctes donc u est diagonalisable car $\dim E = n$.

Si P possède n racines distinctes : u est diagonalisable.

c) $H(u) = (u-\alpha_1 Id_E) \circ (u-\alpha_2 Id_E) \circ \cdots \circ (u-\alpha_p Id_E)$.

Soit $t \in SEP(u,\alpha_p)$. $(u-\alpha_p Id_E)(t) = 0$.

Alors $H(u)(t) = \left((u-\alpha_1 Id_E)\circ\cdots\circ(u-\alpha_p Id_E)\right)(t) = \left((u-\alpha_1 Id_E)\circ\cdots\circ(u-\alpha_{p-1} Id_E)\right)(u-\alpha_p Id_E)(t)$

$H(u)(t) = \left((u-\alpha_1 Id_E)\circ\cdots\circ(u-\alpha_{p-1} Id_E)\right)(0_E) = 0_E$ ... c'était pour rire ! Plus généralement...

Soit $i \in [\![1,p-1]\!]$ (ou $[\![1,p]\!]$!)

$H = \left(\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{p} (X-\alpha_\ell)\right)(X-\alpha_i)$. Posons $H_i = \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i}}^{p} (X-\alpha_\ell)$. $H = H_i \times (X-\alpha_i)$.

Par conséquent : $H(u) = H_i(u) \circ (u-\alpha_i Id_E)$.

$\forall t \in SEP(u,\alpha_i)$, $(u-\alpha_i Id_E)(t) = 0_E$.

$\forall t \in SEP(u,\alpha_i)$, $\left(H_i(u)\circ(u-\alpha_i Id_E)\right)(t) = H_i(u)\left((u-\alpha_i Id_E)(t)\right) = H_i(u)(0_E) = 0_E$.

Donc $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall t \in SEP(u,\alpha_i)$, $H(u)(t) = 0_E$.

Soit $x \in E$. $E = SEP(u,\alpha_1) \oplus \cdots \oplus SEP(u,\alpha_p)$.

$\exists (u_1,\dots,u_p) \in SEP(u,\alpha_1)\times\cdots\times SEP(u,\alpha_p)$, $x = u_1 + \cdots + u_p$.

$H(u)(x) = H(u)(u_1) + \cdots + H(u)(u_p) = 0_E + \cdots + 0_E = 0_E$.

$\forall x \in E,\ H(u)(x) = 0_E$. $\quad H(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$H = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_p)$ est un polynôme annulateur de u et $H \neq 0_{\mathbb{C}[X]}$.

a tout polynôme annulateur normal de u est degré supérieur ou égal à n donc

$\deg H = p \geq n$.
$\uparrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ sont deux à deux distincts.

mais $\dim E = n$ donc u a au plus n valeurs propres ; par conséquent $p \leq n$.

Finalement $p = n$. Alors u possède n valeurs propres distinctes.

Q2 Notons que $e_1, \dots, e_n$ sont n vecteurs propres associés de u à n valeurs propres distinctes donc $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E dont le cardinal n est la dimension de E. $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

a) $\forall i \in [\![1,n]\!],\ u(e_i) = \lambda_i e_i$; $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ u^k(e_i) = \lambda_i^k e_i$ (récurrence simple).

Donc $\forall k \in \mathbb{N},\ u^k(x_0) = u^k(e_1) + \dots + u^k(e_n) = \lambda_1^k e_1 + \dots + \lambda_n^k e_n$.

$\forall k \in \mathbb{N},\ u^k(x_0) = \lambda_1^k e_1 + \dots + \lambda_n^k e_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k e_i$.

b) $\beta_0 x_0 + \dots + \beta_{n-1} u^{n-1}(x_0) = 0_E$. $\quad \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k u^k(x_0) = 0_E$.

$$0_E = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k u^k(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\beta_k\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k e_i\Big)\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \lambda_i^k\Big) e_i = \sum_{i=1}^{n} Q(\lambda_i) e_i.$$

$\sum_{i=1}^{n} Q(\lambda_i) e_i = 0_E$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!],\ Q(\lambda_i) = 0$.

$Q = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k X^k$ est de degré au plus $n-1$ et admet n racines distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Ainsi $Q = 0_{\mathbb{C}[X]}$. Alors tous les coefficients de Q sont nuls. $\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_{n-1} = 0$.

c) Nous venons de montrer que : $\forall (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $\beta_0 x_0 + \beta_1 u(x_0) + \dots + \beta_{n-1} u^{n-1}(x_0) = 0_E \Rightarrow$
$\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_{n-1} = 0$.

Ainsi $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une famille libre de E dont le cardinal n est la dimension de E. $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Alors $u \in \mathcal{S}$

(Q3) a) $M_3 = M(1,-3,3)$. le polynôme associé à M_3 est $P = X^3 - (3X^2 - 3X + 1) = (X-1)^3$.

le polynôme associé à M_3 est : $(X-1)^3$.

b) $Sp\, M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid (z-1)^3 = 0\} = \{1\}$ d'après III Q 1a) (... associé à M_3 un endomorphisme ...)

si M_3 est diagonalisable : dim $SEP(M_3, 1) = 3$ donc $rg(M_3 - I_3) = 0$ et alors $M_3 = I_3$!!

Ainsi M_3 n'est pas diagonalisable.

on pouvait également conclure en utilisant III Q 1 c).

PARTIE IV.

(Q1) $P_n(1) = 1 - \frac{1}{n}\underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{n\text{ fois}} = 0$. 1 est racine de P_n.

$P_n'(X) = nX^{n-1} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k X^{k-1}$; $P_n'(1) = n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k = n - \frac{1}{n}\frac{(n-1)\times n}{2} = n - \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$.

$P_n'(1) = \frac{n+1}{2}$ donc 1 n'est pas racine de P_n'.

1 est une racine simple de P_n.

(Q2) Soit z dans $\mathbb{C}$ tel que $P_n(z) = 0$. $z^n - \frac{1}{n}(z^{n-1} + \cdots + z + 1) = 0$.

$nz^n = z^{n-1} + \cdots + z + 1$; $n|z|^n = |nz^n| = |z^{n-1} + \cdots + z + 1| \leq |z^{n-1}| + |z^{n-2}| + \cdots + |z| + 1$.

Alors $n|z|^n \leq |z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \cdots + |z| + 1$.

Supposons que $|z| > 1$. Alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $|z|^k < |z|^n$.

donc $n|z|^n \leq |z|^{n-1} + |z|^{n-1} + \cdots + |z| + 1 < n|z|^n$; $n|z|^n < n|z|^n$!!

Ainsi si $z \in \mathbb{C}$ et si $P_n(z) = 0$: $|z| \leq 1$.

(Q3) a) $n z^n = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1$.

Observons que z n'est pas nul car $|z| = 1$.

En divisant par z^n il vient : $n = z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(n-1)} + z^{-n} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{-(n-k)}$.

Alors $n = Re(n) = Re\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^{-(n-k)}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} Re\left(\left(e^{i\theta}\right)^{k-n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos((k-n)\theta)$.

$$n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos((k-n)\theta).$$

b) Supposons que : $\theta \neq 0$. $\cos\theta < 1$ car $\theta \in [-\pi, \pi[$.

Ainsi $n = \sum_{k=0}^{n-2} \cos((k-n)\theta) + \cos(-\theta) \leq \sum_{k=0}^{n-2} 1 + \cos\theta = (n-1) + \cos\theta < n-1+1 = n$!!

Donc nécessairement $\theta = 0$ et $z = 1$.

Ainsi
- toutes les racines de P_n ont un module inférieur ou égal à 1 ;
- si une racine de P_n a pour module 1, elle est égale à 1 ;
- 1 est racine simple de P_n.

(Q4) a) $Q_n(X) = (X-1)\left[X^n - \frac{1}{n}(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1)\right]$.

$Q_n(X) = X^{n+1} - X^n - \frac{1}{n}\underbrace{(X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1)}_{= X^n - 1} = X^{n+1} - X^n - \frac{1}{n}(X^n - 1)$.

$$Q_n(X) = X^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)X^n + \frac{1}{n}.$$

b) 1 est racine simple de P_n. Soit α une racine de P_n distincte de 1. Montrons que α est une racine simple de P_n.

Comme $Q_n = (X-1)P_n$ et que $\alpha \neq 1$ il suffit de prouver que α est une racine simple de Q_n donc que $Q'_n(\alpha) \neq 0$ ($Q_n(\alpha) = (\alpha-1)P_n(\alpha) = 0$).

$Q_n(\alpha) = 0$ donc $\alpha^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\alpha^n + \frac{1}{n} = 0$.

Supposons que $\varphi_n'(\alpha)=0$. $\varphi_n'=(n+1)X^n-(1+\frac{1}{n})nX^{n-1}$.

Alors $0=\varphi_n'(\alpha)=(n+1)\alpha^n-(1+\frac{1}{n})n\alpha^{n-1}=(n+1)(\alpha^n-\alpha^{n-1})=(n+1)\alpha^{n-1}(\alpha-1)$.

$(n+1)\alpha^{n-1}(\alpha-1)=0$ donc $\alpha=0$ ou 1 ce qui est impossible ($\alpha\neq 1$ et 0 n'est pas racine de P_n).

$\varphi_n(\alpha)=0$ et $\varphi_n'(\alpha)\neq 0$. α est une racine simple de φ_n donc de P_n.

Toutes les racines de P_n sont simples.

Q5 Soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans une base quelconque $\mathcal{B}$ de E est M_n.

Si x_0 est le premier vecteur de $\mathcal{B}$. $\mathcal{B}=(x_0,u(x_0),\dots,u^{n-1}(x_0))$.

$M_n=M_{\mathcal{B}}(u)$, $M_n=M(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n})$ et le polynôme associé à cette matrice est P_n.

$P_n\in\mathbb{R}[X]$ donc $P_n\in\mathbb{C}[X]$. $\deg P_n=n$. Ainsi P_n est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.

$\deg P_n=n$, P_n est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et toutes les racines de P_n sont simples.

Alors P_n admet exactement n racines distinctes dans $\mathbb{C}[X]$.

Alors III Q1 b), u est diagonalisable. Ainsi M_n est diagonalisable.

M_n ayant n valeurs propres distinctes et étant d'ordre n,

les sous-espaces propres de M_n sont de dimension 1.

Soit $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{C})$. $M_nX=X \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{n}x_n=x_1\\ x_1+\frac{1}{n}x_n=x_2\\ \dots\\ x_{n-1}+\frac{1}{n}x_n=x_n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=\frac{1}{n}x_n\\ x_2=\frac{2}{n}x_n\\ x_3=\frac{3}{n}x_n\\ \dots\\ x_{n-1}=\frac{n-1}{n}x_n\\ \frac{n-1}{n}x_n+\frac{1}{n}x_n=x_n\end{cases}$

$M_nX=X \Leftrightarrow \forall k\in[\![1,n-1]\!],\ x_k=\frac{k}{n}x_n$

Ainsi $SEP(M_n,1)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\2\\ \vdots\\ n-1\\ n\end{pmatrix}$. $\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ n-1\\ n\end{pmatrix}\right)$ est une base de $SEP(M_n,1)$.

PARTIE V

Q0 Soit $(v,w) \in F\times G$. $\exists (\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in K^r$, $\exists(\beta_1,\dots,\beta_s)\in K^s$,
$v=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i$ et $w=\sum_{j=1}^{s}\beta_j w_j$ ($(v_1,\dots,v_r)$ est une base de F et $(w_1,\dots,w_s)$ une base de G).

$(v,w)=(v,0_G)+(0_F,w)=\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i,0_G\right)+\left(0_F,\sum_{j=1}^{s}\beta_j w_j\right)$.

$(v,w)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(v_i,0_G)+\sum_{j=1}^{s}\beta_j(0_F,w_j)$.

Ainsi $((v_1,0_G),(v_2,0_G),\dots,(v_r,0_G),(0_F,w_1),(0_F,w_2),\dots,(0_F,w_s))$ est une famille génératrice de $F\times G$. Montrons que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in K^s$ et soit $(\beta_1,\dots,\beta_s)\in K^s$ tels que :

$\alpha_1(v_1,0_G)+\dots+\alpha_r(v_r,0_G)+\beta_1(0_F,w_1)+\dots+\beta_s(0_F,w_s)=(0_F,0_G)$.

Alors $\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i,\sum_{j=1}^{s}\beta_j w_j\right)=(0_F,0_G)$, $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i=0_F$ et $\sum_{j=1}^{s}\beta_j w_j=0_G$.

Comme $(v_1,\dots,v_r)$ et $(w_1,\dots,w_s)$ sont libres : $\alpha_1=\dots=\alpha_r=0$ et $\beta_1=\dots=\beta_s=0$.

Ce qui achève de montrer que la famille $((v_1,0_G),\dots,(v_r,0_G),(0_F,w_1),\dots,(0_F,w_s))$ est libre.

Ainsi $((v_1,0_G),\dots,(v_r,0_G),(0_F,w_1),\dots,(0_F,w_s))$ est une base de $F\times G$.

Cette famille ayant pour cardinal $r+s$: $\dim(F\times G)=r+s$.

Alors $\dim(F\times G)=\dim F+\dim G$.

Exercice .. Prouver ce résultat lorsque $F=\{0_F\}$ ou $G=\{0_G\}$.

Q1 Pour faciliter les écritures nous posons $\mathcal{E}=\mathbb{C}_{p-1}[X]\times\mathbb{C}_{q-1}[X]$.

- Soit $(Q,R)\in\mathcal{E}$. $\psi(Q,R)=(X-\beta)^q Q(X)+(X-\alpha)^p R(X)$
$(X-\beta)^q$, Q, $(X-\alpha)^p$, R sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$ donc $\psi(Q,R)\in\mathbb{C}[X]$.
$\deg Q\leq p-1$, $\deg R\leq q-1$ donc $\deg((X-\beta)^q Q(X))\leq p+q-1$ et $\deg((X-\alpha)^p R(X))\leq p+q-1$
Ainsi $\psi(Q,R)\in\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$. ψ est une application de $\mathbb{C}_{p-1}[X]\times\mathbb{C}_{q-1}[X]$ dans $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.

• Soit $(Q,R)\in E$, soit $(U,V)\in E$ et soit $\lambda\in\mathbb{C}$.

$$\psi(\lambda(Q,R)+(U,V))=\psi((\lambda Q+U,\lambda R+V))=(X-\beta)^q(\lambda Q+U)+(X-\alpha)^p(\lambda R+V).$$
$$=\lambda\left((X-\beta)^q Q+(X-\alpha)^p R\right)+\left((X-\beta)^q U+(X-\alpha)^p V\right)$$
$$=\lambda\,\psi((Q,R))+\psi((U,V)).$$

ψ est linéaire.

Ainsi $\psi\in\mathcal{L}(\mathbb{C}_{p-1}[X]\times\mathbb{C}_{q-1}[X],\ \mathbb{C}_{p+q-1}[X])$.

b) Soit $(Q,R)\in\operatorname{Ker}\psi$. $(X-\beta)^q Q+(X-\alpha)^p R=0$; $(X-\beta)^q Q=-(X-\alpha)^p R$

$(X-\alpha)^p$ divise $(X-\beta)^q Q$ et $\alpha\neq\beta$.

Ainsi $(X-\alpha)^p$ divise Q. Alors α est une racine de Q d'ordre au moins p. Comme $\deg Q\leq p-1$ nécessairement $Q=0_{\mathbb{C}_{p-1}[X]}$.

Alors $(X-\alpha)^p R=0$ et $(X-\alpha)^p\neq 0$ donc $R=0_{\mathbb{C}_{q-1}[X]}$.

Finalement $\operatorname{Ker}\psi=\{(0_{\mathbb{C}_{p-1}[X]},0_{\mathbb{C}_{q-1}[X]})\}$. ψ est injective.

ψ est une application linéaire injective de $\mathbb{C}_{p-1}[X]\times\mathbb{C}_{q-1}[X]$ dans $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$ et $\dim\mathbb{C}_{p-1}[X]\times\mathbb{C}_{q-1}[X]=\dim\mathbb{C}_{p-1}[X]+\dim\mathbb{C}_{q-1}[X]=p+q=\dim\mathbb{C}_{p+q-1}[X]<+\infty$.

Alors ψ est un isomorphisme de $\mathbb{C}_{p-1}[X]\times\mathbb{C}_{q-1}[X]$ sur $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.

c) ψ est en particulier surjective et $1\in\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.

Ainsi $\exists!\,(A,B)\in\mathbb{C}_{p-1}[X]\times\mathbb{C}_{q-1}[X]$, $\psi((A,B))=1$.

$\exists!\,(A,B)\in\mathbb{C}_{p-1}[X]\times\mathbb{C}_{q-1}[X]$, $A(X)(X-\beta)^q+B(X)(X-\alpha)^p=(X-\beta)^q A(X)+(X-\alpha)^p B(X)=1$.

Q2 a) Soit $x\in E_\alpha\cap E_\beta$. $(u-\alpha Id_E)^p(x)=(u-\beta Id_E)^q(x)=0_E$.

$1=A(X)(X-\beta)^q+B(X)(X-\alpha)^p$; $Id_E=A(u)\circ(u-\beta Id_E)^q+B(u)\circ(u-\alpha Id_E)^q$

Alors $x = Id_E(x) = A(u)\left((u-\beta Id_E)^q(x)\right) + B(u)\left((u-\alpha Id_E)^p(x)\right) = A(u)(0_E) + B(u)(0_E)$.

$x \in Ker(u-\alpha Id_E)^p$
$x \in Ker(u-\beta Id_E)^q$

$x = 0_E + 0_E = 0_E$.

Ainsi $E_\alpha \cap E_\beta = \{0_E\}$.

b) $x \in E$. $x_1 = \left((u-\beta Id_E)^q \circ A(u)\right)(x)$ et $x_2 = \left((u-\alpha Id_E)^p \circ B(u)\right)(x)$.

$(u-\alpha Id_E)^p(x_1) = \left((u-\alpha Id_E)^p \circ (u-\beta Id_E)^q \circ A(u)\right)(x)$.

Rappelons que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et que $P = (X-\alpha)^p (X-\beta)^q = (X-\beta)^q (X-\alpha)^p$.

Ainsi $(u-\alpha Id_E)^p(x_1) = (P(u)\circ A(u))(x) = (0_{\mathcal{L}(E)} \circ A(u))(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0_E$.

Ainsi $\underline{\underline{x_1 \in E_\alpha}}$. On montre de même que $\underline{\underline{x_2 \in E_\beta}}$.

$1 = (X-\beta)^q A(X) + (X-\alpha)^p B(X)$. $Id_E = (u-\beta Id_E)^q \circ A(u) + (u-\alpha Id_E)^p \circ B(u)$.

$x = Id_E(x) = \left((u-\beta Id_E)^q \circ A(u)\right)(x) + \left((u-\alpha Id_E)^p \circ B(u)\right)(x) = x_1 + x_2$.

$\underline{\underline{x_1 + x_2 = x}}$.

c) Nous avons montré que : $E_\alpha \cap E_\beta = \{0_E\}$ (a) et que

$\forall x \in E, \exists (x_1, x_2) \in E_\alpha \times E_\beta, x = x_1 + x_2$. Ainsi $\underline{\underline{E = E_\alpha \oplus E_\beta}}$.

d) Soit $x \in E_\alpha$. $(u-\alpha Id_E)^p(x) = 0$.

Alors $(u-\alpha Id_E)^p(u(x)) = \left((u-\alpha Id_E)^p \circ u\right)(x) = \left(u \circ (u-\alpha Id_E)^p\right)(x)$

$(u-\alpha Id_E)^p(u(x)) = u\left((u-\alpha Id_E)^p(x)\right) = u(0_E) = 0_E$; $u(x) \in E_\alpha$.

$\underline{\underline{E_\alpha \text{ est stable par } u}}$. On montre de même que $\underline{\underline{E_\beta \text{ est stable par } u}}$.

Q3 a) $(X-\alpha)^{p-1}(X-\beta)^q$ est un polynôme non nul de degré $p-1+q = n-1$ donc

ce polynôme n'est pas un polynôme annulateur de u (II Q3 a)).

Ainsi $(u-\alpha Id_E)^{p-1} \circ (u-\beta Id_E)^q \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors $\exists z_0 \in E$, $\left[(u-\alpha Id_E)^{p-1} \circ (u-\beta Id_E)^q\right](z_0) \neq 0_E$.

Posons $t_0=(u-\beta Id_E)^q(z_0)$. Alors $(u-\alpha Id_E)^{p-1}(t_0)=\left((u-\alpha Id_E)^{p-1}\circ(u-\beta Id_E)^q\right)(z_0)\neq 0_E$.

De plus $(u-\alpha Id_E)^p(t_0)=\left((u-\alpha Id_E)^p\circ(u-\beta Id_E)^q\right)(z_0)=P(u)(z_0)=0_{\mathcal{L}(E)}(z_0)=0_E$.

Alors $t_0\in \operatorname{Ker}(u-\alpha Id_E)^p=E_\alpha$.

$\exists t_0\in E_\alpha,\ (u-\alpha Id_E)^{p-1}(t_0)\neq 0_E$.

b) $\forall k\in[\![0,p-1]\!]$, $(u-\alpha Id_E)^p(u^k(t_0))=u^k((u-\alpha Id_E)^p(t_0))=u^k(0_E)=0_E$.

$(t_0,(u-\alpha Id_E)(t_0),\dots,(u-\alpha Id_E)^{p-1}(t_0))$ est une famille d'éléments de E_α.

Posons $f=u-\alpha Id_E$ et montrons que $(t_0,f(t_0),\dots,f^{p-1}(t_0))$ est libre en se rappelant que $f^p(t_0)=(u-\alpha Id_E)^p(t_0)=0_E$ et que $f^{p-1}(t_0)\neq 0_E$.

Soit $(\alpha_0,\dots,\alpha_{p-1})\in\mathbb{C}^p$ tel que $\sum_{\ell=0}^{p-1}\alpha_\ell f^\ell(t_0)=0_E$.

Montrons que à l'aide d'une récurrence finie que : $\forall k\in[\![0,p-1]\!]$, $\alpha_k=0$.

- $0_E=\sum_{\ell=0}^{p-1}\alpha_\ell f^\ell(t_0)$. $0_E=f^{p-1}(0_E)=\sum_{\ell=0}^{p-1}\alpha_\ell f^{\ell+p-1}(t_0)=\alpha_0 f^{p-1}(t_0)$ car $\forall i\in[\![p,+\infty[\![$, $f^i(t_0)=0_E$.

  Alors $\alpha_0 f^{p-1}(t_0)=0_E$ et $f^{p-1}(t_0)\neq 0_E$; $\alpha_0=0$.

- Supposons pour $k\in[\![0,p-2]\!]$, $\alpha_0=\alpha_1=\dots=\alpha_k=0$. Montrons que $\alpha_{k+1}=0$.

  $\sum_{i=k+1}^{p-1}\alpha_i f^i(t_0)=0_E$ car $\alpha_0=\alpha_1=\dots=\alpha_k=0$.

Alors $0_E=f^{p-2-k}(0_E)=f^{p-2-k}\left(\sum_{i=k+1}^{p-1}\alpha_i f^i(t_0)\right)=\sum_{i=k+1}^{p-1}\alpha_i f^{p-2-k+i}(t_0)$.

Notons que $p-2-k+i=p-1$ si $i=k+1$ et $p-2-k+i\geqslant p$ si $i>k+1$.

Alors $0_E=\sum_{i=k+1}^{p-1}\alpha_i f^{p-2-k+i}(t_0)=\alpha_{k+1} f^{p-1}(t_0)$. Comme $f^{p-1}(t_0)\neq 0_E$: $\alpha_{k+1}=0$ et la récurrence s'achève.

Donc $\alpha_0=\alpha_1=\dots=\alpha_{p-1}=0$. Ceci achève de montrer que

$(t_0,(u-\alpha Id_E)(t_0),\dots,(u-\alpha Id_E)^{p-1}(t_0))$ est une famille libre.

$(t_0, (u-\alpha Id_E)(t_0), \cdots, (u-\alpha Id_E)^{p-1}(t_0))$ est une famille libre de E_α.

cette famille étant de cardinal p alors $\dim E_\alpha \geq p$.

c) On montre de même que : $\dim E_\beta \geq q$.

Supposons $\dim E_\alpha > p$ ou $\dim E_\beta > q$. Alors $\dim E_\alpha + \dim E_\beta > p+q = n$.

Or $n = \dim E = \dim (E_\alpha \oplus E_\beta) = \dim E_\alpha + \dim E_\beta$ donc $n > n$!

Ainsi $\dim E_\alpha \geq p$, $\dim E_\beta \geq q$ et on n'a pas $\dim E_\alpha > p$ ou $\dim E_\beta > q$.

Par conséquent $\dim E_\alpha = p$ et $\dim E_\beta = q$.

(Q4) Posons $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $e_k = (u-\alpha Id_E)^k(t_0)$.

$(e_0, e_1, \cdots, e_{p-1})$ est une famille libre de E_α (Q3 b) dont le cardinal p coïncide avec la dimension de E_α. Alors $(e_0, e_1, \cdots, e_{p-1})$ est une base de E_α.

$\forall k \in [\![0, p-2]\!]$, $(u-\alpha Id_E)(e_k) = (u-\alpha Id_E)^{k+1}(t_0) = e_{k+1}$. $\forall k \in [\![0, p-2]\!]$, $u(e_k) - \alpha e_k = e_{k+1}$.

$\forall k \in [\![0, p-2]\!]$, $u(e_k) = \alpha e_k + e_{k+1}$. $(u-\alpha Id_E)(e_{p-1}) = (u-\alpha Id_E)^p(t_0) = 0_E$

donc $u(e_{p-1}) = \alpha e_{p-1}$.

De la même manière on peut trouver une base $(e'_0, e'_1, \cdots, e'_{q-1})$ de E_β telle que

$\forall k \in [\![0, q-2]\!]$, $u(e'_k) = \beta e'_k + e'_{k+1}$ et $u(e'_{q-1}) = \beta e'_{q-1}$.

$(e_0, \cdots, e_{p-1})$ est une base de E_α, $(e'_0, \cdots, e'_{q-1})$ est une base de E_β et $E = E_\alpha \oplus E_\beta$.

Alors $\mathcal{B} = (e_0, \cdots, e_{p-1}, e'_0, \cdots, e'_{q-1})$ est une base de E telle que :

$\forall k \in [\![0, p-2]\!]$, $u(e_k) = \alpha e_k + e_{k+1}$, $u(e_{p-1}) = \alpha e_{p-1}$, $\forall k \in [\![0, q-2]\!]$ $u(e'_k) = \beta e'_k + e'_{k+1}$ et $u(e'_{q-1}) = \beta e'_{q-1}$

Alors $M_{\mathcal{B}}(u)$ est du type demandé c'est à dire $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 1 & \alpha & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \\ \vdots & & 1 & \alpha & & & \\ & & & 0 & \beta & & \\ & & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \beta & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & & 1 & \beta \end{pmatrix}$

avec une diagonale comportant p fois α et q fois β.