SUJET 17

Dans ce qui suit E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie non nulle n.

Un endomorphisme f de E est une homothétie vectorielle s'il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $f = \lambda\, \mathrm{Id}_E$.

Un endomorphisme f de E est nilpotent s'il existe p dans $\mathbb{N}$ (ou dans $\mathbb{N}^*$ ...) tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. L'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent f de E est le plus petit élément r de $\mathbb{N}$ tel que $f^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont même trace. La trace d'un endomorphisme f de E est la trace d'une de ses matrices dans une base de E et nous la noterons $\mathrm{tr}\, f$.

tr est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$. De plus $\forall (f,g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E),\ \mathrm{tr}(f \circ g) = \mathrm{tr}(g \circ f)$.

Si f et g sont deux endomorphismes de E on note $[f,g]$ l'endomorphisme $f \circ g - g \circ f$.

Si f un élément de E, on note Φ_f l'application qui a tout élément g de $\mathcal{L}(E)$ associe $[f,g]$.

On se propose d'étudier quelques propriétés de Φ_f pour f dans E.

PARTIE I Préliminaires

A Préliminaire 1

h est un endomorphisme de E. On se propose de montrer qu'il existe un endomorphisme g de E tel que $h = h \circ g \circ h$.

Q1 Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, h$ dans E. Montrer que l'application ℓ de F dans $\mathrm{Im}\, h$ définie par : $\forall x \in F,\ \ell(x) = h(x)$ est un isomorphisme.

Q2 Soit F' un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, h$ dans E et p la projection sur $\mathrm{Im}\, h$ parallèlement à F'.

On pose $\forall x \in E,\ g(x) = l^{-1}(p(x))$ (ce n'est pas une composition ! !). Montrer que g est solution du problème.

B Préliminaire 2 Caractérisation des homothéties.

Q1 Soit h un endomorphisme de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) h laisse stable toutes les droites vectorielles de E.

ii) Pour tout élément x de E, la famille $(x, h(x))$ est liée.

Q2 a) Montrer que les homothéties vectorielles de E vérifient i) (et ii)).

b) Soit h un endomorphisme de E qui vérife i) ou ii).

Montrer que pour tout élément x de E il existe un élément λ_x de $\mathbb{K}$ tel que $h(x) = \lambda_x\, x$.

Soit u un élément non nul de E et λ un élément de $\mathbb{K}$ tel que $h(u) = \lambda\, u$.

Montrer que $\forall x \in E,\ h(x) = \lambda\, x$ (on pourra distinguer deux cas : (u,x) liée et (u,x) libre, et faire intervenir, si nécessaire, $x+u$).

c) Conclure.

PARTIE II Quelques propriétés de Φ_f

f est un élément de $\mathcal{L}(E)$.

Q0 Pour faire plaisir à Jacobi, montrer que si g est h sont deux autres endomorphismes de E :

$$\big[f,[g,h]\big]+\big[g,[h,f]\big]+\big[h,[f,g]\big]=0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Q1 Montrer que Φ_f est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Q2 a) Montrer que $\operatorname{Im}\Phi_f$ est contenu dans l'ensemble $\mathcal{T}$ des endomorphismes de E de trace nulle.

b) Montrer que $\forall k\in\mathbb{N},\ f^k\in\operatorname{Ker}\Phi_f$.

c) Déterminer Φ_f et $\operatorname{Ker}\Phi_f$ lorsque f est une homothétie vectorielle.

d) Montrer que si f n'est pas une homothétie vectorielle : $\dim\operatorname{Ker}\Phi_f\geqslant 2$.

Q3 a) Montrer que $\forall p\in\mathbb{N},\ \forall g\in\mathcal{L}(E),\ \Phi_f^p(g)=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}f^{p-k}\circ g\circ f^k$.

On suppose dans la suite de cette question que f est nilpotent d'indice r.

b) Préciser Φ_f^{2r-1} et Φ_f^{2r-2}.

c) Utiliser I A pour montrer que f^{r-1} appartient à l'image de Φ_f^{2r-2}.

d) Que dire alors de Φ_f ?

Q4 On suppose que $\Phi_f=0_{\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))}$.

a) Montrer que pour tout élément x de E, $(x,f(x))$ est liée (on pourra construire une projection à partir de x).

b) En déduire que f est une homothétie vectorielle.

c) Réciproquement ? !. Énoncer le résultat obtenu.

Q5 On suppose que g est un vecteur propre de ϕ_f associé à la valeur propre non nulle λ.

a) Montrer que $\forall k\in\mathbb{N},\ \Phi_f(g^k)=k\,\lambda\,g^k$.

b) En déduire en raisonnant par l'absurde que g est nilpotent.

Q6 λ et μ sont deux valeurs propres de f. A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de E.

Montrer que l'on peut trouver un élément non nul X (resp. Y) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX=\lambda X$ (resp. ${}^tAY=\mu Y$).

Calculer AX^tY-X^tYA et en déduire que $\lambda-\mu$ est valeur propre de Φ_f.

Q7 On suppose que f admet n valeurs propres distinctes λ_1, λ_2, ..., λ_n. Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, e_i est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i.

a) Justifier que $\widehat{\mathcal{B}}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base de E et déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec $M_{\widehat{\mathcal{B}}}(f)$.

b) En déduire la dimension de $\operatorname{Ker}\Phi_f$ et le rang de Φ_f. Montrer que $(\mathrm{Id}_E,f,f^2,\dots,f^{n-1})$ est une base de $\operatorname{Ker}\Phi_f$.

c) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n^2-n.

Montrer que $\operatorname{Im}\Phi_f=\{h\in\mathcal{L}(E)\mid M_{\widehat{\mathcal{B}}}(h)\in S\}$.

PARTIE III Deux caractérisations des endomorphismes de trace nulle.

Dans un premier temps on se propose de montrer, par récurrence sur la dimension, qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie a une trace nulle si et seulement si il existe une base $\mathcal{C}$, de cet espace, telle que sa matrice dans $\mathcal{C}$ ait tous ses coefficients diagonaux nuls donc soit un élément de $\mathcal{S}$.

Q1 a) Montrer que la condition est suffisante.

b) Montrer que la condition est nécessaire pour les espaces vectoriels de dimension 1.

Q2 On suppose que la condition est nécessaire pour tous les espaces vectoriels de dimension $n-1$ ($n \in [\![2, +\infty[\![$) et on se propose de montrer qu'elle nécessaire dans E qui est de dimension n.

h est un endomorphisme de E de trace nulle.

a) Examiner le cas où $h = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Dans la suite on suppose que h n'est pas nul.

b) Montrer par l'absurde qu'il existe un élément e_1 de E tel que $(e_1, h(e_1))$ soit libre.

c) Montrer l'existence d'un supplémentaire F de la droite vectorielle D engendrée par e_1 qui contient $h(e_1)$.

On note p la projection sur F parallèlement à D et on pose : $\forall y \in F,\ h'(y) = p\big(h(y)\big)$.

d) Montrer que h' est un endomorphisme de F de trace nulle. Conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence.

e) Donner (sans démonstration) un résultat analogue pour les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q3 On se propose de montrer qu'un endomorphisme h de E est de trace nulle si et seulement si on peut trouver deux endomorphismes f et g tels que $h = [f, g]$.

a) Montrer que la condition est suffisante.

b) Utiliser II Q7 et ce qui précède pour montrer que la condition est nécessaire.

c) Donner (sans démonstration) un résultat analogue pour les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q3' **Facultatif** On se propose de retrouver le résultat de Q3. La condition est clairement suffisante. La condition nécessaire est évidente dans les espaces vectoriels de dimension 1.

On suppose que la condition est nécessaire pour tous les espaces vectoriels de dimension $n-1$ ($n \in [\![2, +\infty[\![$) et on se propose de montrer qu'elle nécessaire dans E qui est de dimension n.

h est un endomorphisme de E de trace nulle.

a) Examiner le cas où $h = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Dans la suite on suppose que h n'est pas nul.

b) Montrer par l'absurde qu'il existe un élément e_1 de E tel que $(e_1, h(e_1))$ soit libre.

c) Montrer que l'on peut compléter (e_1) en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E telle que la matrice A de h dans cette base soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$ avec $(X, Y) \in \big(\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})^2\big)$ et $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

d) Montrer l'existence de deux éléments U_1 et V_1 de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ tels que : $A_1 = U_1V_1 - V_1U_1$.

Justifier l'existence d'un élément α de $\mathbb{K}$ tel que $U_1 - \alpha\, I_{n-1}$ soit inversible.

e) On pose $U = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ S & V_1 \end{pmatrix}$ avec $(R, S) \in \big(\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})^2\big)$.

Montrer que $A = UV - VU$ si et seulement si ${}^tX = -{}^tR(U_1 - \alpha\, I_{n-1})$ et $Y = (U - \alpha\, I_{n-1})S$. Conclure.

PARTIE IV Réduction de Φ_f lorsque f est diagonalisable.

► Ici f est un endomorphisme diagonalisable de E. On se propose de montrer que Φ_f est diagonalisable.

λ_1, λ_2, ..., λ_p sont les valeurs propres distinctes de f.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres α_1, α_2, ..., α_n.

$(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$, $u_{i,j}$ est l'endomorphisme de E de matrice $E_{i,j}$ dans $\mathcal{B}$.

Q1 Calculer $\Phi_f(u_{i,j})$ pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$. En déduire que Φ_f est diagonalisable et préciser son spectre.

Q2 a) Montrer que $\operatorname{Ker}\Phi_f = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \forall i \in [\![1,p]\!],\ g(\text{SEP } (f,\lambda_i)) \subset \text{SEP } (f,\lambda_i)\}$.

b) En déduire que $\operatorname{Ker}\Phi_f$ est isomorphe à $\mathcal{L}(\text{SEP } (f,\lambda_1)) \times \mathcal{L}(\text{SEP } (f,\lambda_2)) \times \cdots \times \mathcal{L}(\text{SEP } (f,\lambda_p))$.

c) Préciser la dimension de $\operatorname{Ker}\Phi_f$ et le $\operatorname{rg}\Phi_f$. Et si $p = n$?

PARTIE V f est diagonalisable lorsque Φ_f est diagonalisable.

► Ici f est un endomorphisme E tel que Φ_f est diagonalisable. On se propose de montrer que f est diagonalisable.

Q1 On suppose que f admet au moins une valeur propre λ. $(g_1, g_2, \dots, g_{n^2})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de vecteurs propres de Φ_f respectivement associés aux valeurs propres β_1, β_2, ..., β_{n^2} et x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

a) Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, calculer $f\big(g_i(x)\big)$ en fonction de λ, β_i et $g_i(x)$.

b) On pose $\forall g \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(g) = g(x)$. Montrer que φ est une application linéaire surjective de $\mathcal{L}(E)$ dans E.

c) Montrer que f est diagonalisable.

On se propose de montrer que le spectre de f n'est pas vide.

Q2 Ici $K = \mathbb{C}$. a) Montrer que f possède un polynôme annulateur non nul P.

b) En remarquant que P est scindé montrer qu'au moins une des racines de P est une valeur propre de f. Conclure.

Q3 Ici $K = \mathbb{R}$ et on raisonne par l'absurde. Supposons que f n'a pas de valeur propre. Soit A la matrice de f dans une base de E.

On considère l'endomorphisme ψ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \psi_A(M) = AM - MA$.

On considère également l'endomorphisme $\widehat{\psi_A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \widehat{\psi_A}(M) = AM - MA$.

a) Montrer que ψ_A est diagonalisable.

Montrer que $\widehat{\psi_A}$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles.

b) Montrer qu'il existe un complexe non réel γ valeur propre de A. Montrer que $\bar{\gamma}$ est valeur propre de A et de ${}^tA$.

Soit X (resp. Y) un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \gamma\, X$ (${}^tAY = \bar{\gamma}\, Y$).

Calculer $\widehat{\psi_A}(X\,{}^tY)$ et en déduire une contradiction.

Q4 Conclure.