Dans tout le problème n et N sont deux éléments non nuls de $\mathbb{N}$. $E = \mathbb{C}^N$ et e est l'endomorphisme identique de E ($\forall x \in E,\ e(x) = x$).
Si f est un endomorphisme de E : $\mathcal{R}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g^2 = f\}$.

Si f est un endomorphisme de E et si $P = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k X^k$ est un élément $\mathbb{C}[X]$, alors $P(f) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k f^k$

Partie I

---

f est un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe deux éléments a, b de $\mathbb{C}$ et deux endomorphismes $\boxed{\text{non nuls}}$ p et q de E tels que :

$$a \neq b \quad \text{et} \quad \begin{cases} e &= p+q \\ f &= ap+bq \\ f^2 &= a^2p+b^2q \end{cases}$$

Q1 a) Montrer que l'endomorphisme $(f-ae)\circ(f-be)$ est nul.

b) En déduire par analyse-synthèse que $\mathrm{Ker}(f-ae)$ et $\mathrm{Ker}(f-be)$ sont supplémentaires.

c) Montrer que les deux sous-espaces $\mathrm{Ker}(f-ae)$ et $\mathrm{Ker}(f-be)$ ne sont pas réduits au vecteur nul.

d) Montrer $\mathrm{Sp}\, f = \{a, b\}$ et que f est diagonalisable.

Q2 a) Exprimer p et q en fonction de e et f.

b) Montrer que $p\circ q = q\circ p = 0$, $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

c) En déduire que pour tout r dans $\mathbb{N}$, $f^r = a^r p + b^r q$.

Montrer que si $ab \neq 0$, f est bijective et : $\forall r \in \mathbb{Z},\ f^r = a^r p + b^r q$.

d) Montrer que p (resp. q) est la projection sur $\mathrm{Ker}(f-ae)$ (resp. $\mathrm{Ker}(f-be)$) parallèlement à $\mathrm{Ker}(f-be)$ (resp. $\mathrm{Ker}(f-ae)$).

Q3 $F = \{xp+yq \mid (x,y) \in \mathbb{C}^2\}$

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 2, stable par la composition.

b) Déterminer tous les projecteurs de E appartenant à F.

c) Déterminer $\mathcal{R}(f)\cap F$ et préciser(avec soin) le nombre d'éléments de cet ensemble.

Q4 *Exemple :*

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer J^r pour tout r dans $\mathbb{N}^*$.

b) Exprimer A en fonction de I_3 et J ; en déduire A^r pour tout élément r de $\mathbb{N}^*$.

c) Trouver deux éléments distincts a et b de $\mathbb{C}$ et deux éléments B et C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tels que :

$$\forall r \in \mathbb{N},\ A^r = a^r B + b^r C$$

d) Déterminer en fonction de B et C quatre matrices M telles que $M^2 = A$.

e) A est-elle diagonalisable ? Si oui la digonaliser.

Partie II

---

p_1, p_2, ..., p_n sont n endomorphismes $\boxed{\text{non nuls}}$ de E. x_1, x_2, ..., x_n sont n nombres complexes $\boxed{\text{distincts}}$.

f est un endomorphisme de E tel que :

$$\forall r \in \mathbb{N},\ f^r = \sum_{k=1}^{n} x_k^r\, p_k = x_1^r\, p_1 + x_2^r\, p_2 + \cdots + x_n^r\, p_n \quad (1)$$

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Montrer que pour tout élément P de $\mathbb{C}[X]$: $\quad P(f) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(x_k)\, p_k$.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ $U = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$. Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, U_i est le quotient de U par $X - x_i$ ($U_i = \displaystyle\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(X - x_k)$).

Enfin pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, on pose $L_i = \dfrac{1}{U_i(x_i)}\, U_i$.

a) Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$. Montrer que : $L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$

b) Montrer en utilisant Q1 que $U(f)$ est l'endomorphisme nul. Qu'en déduire pour $\mathrm{Sp}(f)$?

c) Montrer que pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$, $p_i = L_i(f)$ (utiliser Q1). En déduire que si i et j sont deux éléments de $[\![1,n]\!]$:

$$p_j \circ p_i = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ p_i & \text{si } j = i \end{cases}$$

(on rappelle que si P et Q sont deux éléments de $\mathbb{C}[X]$: $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$

Par des considérations analogues prouver que pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$: $(f - x_i e) \circ p_i = 0$.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ a) Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$ on pose $F_i = \mathrm{Ker}(f - x_i e)$.

$i \in [\![1,n]\!]$. Montrer que $\mathrm{Im}\, p_i \subset F_i$ (utiliser Q2.c). En déduire que x_i est valeur propre de f.

Justifier alors que $\mathrm{Sp}\, f = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

b) En utilisant (1) pour $r = 0$, montrer que $E \subset \mathrm{Im}\, p_1 + \mathrm{Im}\, p_2 + \cdots + \mathrm{Im}\, p_n$.

Montrer encore que : $E \subset \mathrm{Im}\, p_1 + \mathrm{Im}\, p_2 + \cdots + \mathrm{Im}\, p_n \subset F_1 + F_2 + \cdots + F_n \subset E$.

En déduire que f est diagonalisable et que pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, $\mathrm{Im}\, p_i = F_i$.

Montrer enfin que si i est élément de $[\![1,n]\!]$, p_i est la projection sur $\mathrm{Im}\, p_i = F_i$ parallèlement à $G_i = \displaystyle\bigoplus_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} F_k$

$\boxed{\textbf{Q4}}$ F est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

a) Montrer que la famille $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ est libre ($p_k \circ p_i = 0$ si $k \neq i$ et p_i si $k = i$...). En déduire la dimension de F.

b) Soit $g = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_n p_n$ un élément de F. Montrer que $g^2 = \alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \cdots + \alpha_n^2 p_n$.

Déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{R}(f) \cap F$ (on distinguera deux cas).

c) Montrer que F contient exactement 2^n projecteurs.

$\boxed{\textbf{Q5}}$ h est un endomorphisme diagonalisable de E tel que $\mathrm{Sp}\, h = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Montrer qu'il existe n endomorphismes non nuls q_1, q_2, ..., q_n de E tels que :

$$\forall r \in \mathbb{N},\ h^r = x_1^r\, q_1 + x_2^r\, q_2 + \cdots + x_n^r\, q_n$$

$\boxed{\textbf{Q6}}$ On suppose ici $n = N$ et on revient à f. On se propose de montrer que $\mathcal{R}(f) \subset F$.

a) Montrer que F_1, F_2, ..., F_N sont des droites vectorielles.

Pour tout éléments i de $[\![1, N]\!]$, on note e_i un vecteur non nul de F_i. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_N)$ est alors une base de E constituée de vecteurs propres de f.

b) Soit g un élément de $\mathcal{L}(E)$ qui commute avec f.

Montrer que pour tout élément i de $[\![1, N]\!]$, il existe un élément μ_i de $\mathbb{C}$ tel que $g(e_i) = \mu_i e_i$. En déduire que $g = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \cdots + \mu_N p_N$ et donc que g appartient à F.

c) Déduire de ce qui précède que $\mathcal{R}(f) \subset F$ et donc que $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(f) \cap F$.

$\boxed{\textbf{Q7}}$ *Exemple :* On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Déterminer les valeurs propres x_1, x_2, x_3 de A ($x_1 < x_2 < x_3$! !).

b) Calculer L_1, L_2, L_3. Trouver les matrices $A_1 = L_1(A)$, $A_2 = L_2(A)$ et $A_3 = L_3(A)$.

Trouver en fonction de A_1, A_2 et A_3 toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = A$.

Partie III

Soit u un endomorphisme de E tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ a) Soit x un élément de E tel que $u^{n-1}(x) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est libre (former une combinaison linéaire nulle et montrer à l'aide d'une récurrence faible et de compositions que les coefficients sont nuls).

b) Soit P un élément de $\mathbb{C}[X]$. Soit R le reste dans la division euclidienne de P par X^n.

Montrer que si X^n divise P alors $P(u) = 0$.

Réciproquement on suppose que $P(u) = 0$. Montrer que $R(u)(x) = 0_E$, puis en utilisant a) que $R = 0$; en déduire que X^n divise P !

c) Montrer que si $\mathcal{R}(u) \neq \emptyset$, alors $n \leqslant \dfrac{N+1}{2}$ (on pourra remarquer que si v appartient à $\mathcal{R}(u)$, $v^{2n-2} \neq 0$ et $v^{2n} = 0$).

$\boxed{\textbf{Q2}}$ a) Trouver (ou donner) les réels a_0, a_1, a_2, ..., a_n tels que :

$$\sqrt{1+x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

b) On pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ (oui de 0 à $\underline{n-1}$). Montrer que $x \to \dfrac{P_n^2(x) - x - 1}{x^n}$ possède une limite finie en 0 (utiliser a)).

En déduire que X^n divise $P_n^2 - X - 1$ (on pourra considérer le reste dans la division de $P_n^2 - X - 1$ par X^n).

Dans la suite ω est un élément non nul de $\mathbb{C}$ et $Q_{n,\omega} = \omega P_n\left(\dfrac{X}{\omega^2}\right)$.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ On se propose de trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des polynômes Q de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tels que X^n divise $Q^2 - X - \omega^2$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ contient $Q_{n,\omega}$ et $-Q_{n,\omega}$.

b) Soit Q_1 et Q_2 deux éléments de $\mathcal{S}$. Montrer que X^n divise $Q_1^2 - Q_2^2$

En déduire $Q_1 - Q_2$ s'annule en 0 et pas $Q_1 + Q_2$ ou l'inverse.

On suppose $(Q_1 - Q_2)(0) = 0$. Montrer que que X^n divise $Q1 - Q_2$ et que $Q_1 = Q_2$

Examiner le cas $(Q_1 + Q_2)(0) = 0$. Prouver enfin que : $\mathcal{S} = \{Q_{n,\omega}$ et $-Q_{n,\omega}\}$

c) Etablir que : $\mathcal{R}(u + \omega^2 e) \neq \emptyset$.

Q4 On suppose $n = N$ et on prend x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Notons que $\big(x, u(x), u^2(x), ..., u^{n-1}(x)\big)$ est une base de E.

Soit v un élément de $\mathcal{R}(u + \omega^2 e)$.

a) Montrer que v commute avec u.

b) Montrer qu'il existe P dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $v(x) = (P(u))(x)$.

Montrer que $v = P(u)$ (deux endomorphismes de E sont égaux s'ils coïncident sur une base de E).

Montrer que : $v = Q_{n,\omega}(u)$ ou $v = -Q_{n,\omega}(u)$. En déduire que $\mathcal{R}(u + \omega^2 e) = \{Q_{n,\omega}(u),\ -Q_{n,\omega}(u)\}$.

Q5 *Application :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver toutes les matrices M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = A$.

Q6 On suppose que n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et que $\mathcal{R}(u) \neq \emptyset$.

Montrer que $\mathcal{R}(u)$ possède une infinité d'éléments.

Q7 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les matrices qui commutent avec A.

b) Déterminer les éléments M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tels que $M^2 = A$.

Je vous fais grace de la partie IV (il est vrai qu'on y parle de polynôme caractéristique).
