PARTIE I

E est l'ensemble des suites réelles $u=(u_n)_{n\geqslant 0}$ à termes positifs et telles que la série de terme général u_n converge.

Q1 Montrer que, pour tout élément x de $[0,1]$, la série de terme général $u_n\,x^n$ converge.

Dans toute la partie I, $u=(u_n)_{n\geqslant 0}$ est un élément de E. On pose alors : $\forall x\in[0,1],\ F_u(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\,x^n$. F_u est appelée **fonction génératrice de la suite** u.

Q2 a est un élément de $[0,1]$. On se propose de montrer que F_u est continue en a.

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[0,1],\ |F_u(x)-F_u(a)|\leqslant \sum_{k=0}^{n}u_k\,|x^k-a^k|+\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k$.

b) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un élément r de $\mathbb{N}$ tel que : $\sum_{k=r+1}^{+\infty}u_k<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Achever de prouver la continuité de F_u en a.

Q3 On pose : $\forall x\in[0,1[,\ G_u(x)=\dfrac{F_u(x)-F_u(1)}{x-1}$.

a) Montrer que : $\forall x\in[0,1[,\ G_u(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})$.

Montrer que G_u est croissante sur $[0,1[$.

b) On suppose que la série de terme général nu_n converge. Montrer que G_u est majorée sur $[0,1[$.

En déduire que F_u est dérivable en 1 et que : $F'_u(1)\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}ku_k$

c) Réciproquement on suppose que F_u est dérivable en 1.

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,1[,\ G_u(x)\geqslant\sum_{k=1}^{n}u_k(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})$.

En déduire que la série de terme général nu_n converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty}k\,u_k\leqslant F'_u(1)$.

d) Conclure cette question.

Q4 a) n est un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k\,x^k=\mathrm{o}(x^n)$ au voisinage de 0.

En déduire que F_u admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.

b) Soit $v=(v_n)_{n\geqslant 0}$ un seconde élément de E. Montrer que si $F_u=F_v$ alors $u=v$.

Q5 $v=(v_n)_{n\geqslant 0}$ est toujours un second élément de E. On pose $\forall k\in\mathbb{N},\ w_k=\sum_{i=0}^{k}u_i\,v_{k-i}$.

a) Montrer que : $\forall x\in[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}w_k\,x^k\leqslant\left(\sum_{i=0}^{n}u_i\,x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}v_j\,x^j\right)\leqslant\sum_{k=0}^{2n}w_k\,x^k$.

b) Montrer que w est un élément de E et que : $\forall x\in[0,1],\ F_w(x)=F_u(x)\ F_v(x)$.

PARTIE II

Un candidat doté d'un capital initial de N francs ($N \in \mathbb{N}^*$) joue contre une banque, avec une pièce de monnaie dont la probabilité de donner pile est égale à p ($p \in]0,1[$). Le jeu est le suivant.

Il lance la pièce ; si elle donne pile il gagne un franc sinon il perd un franc.

Si, à l'issue de ce lancer, son capital est nul, il est ruiné et le jeu s'arrête. Sinon, le jeu continu, selon les mêmes règles avec un nouveau lancer de la pièce et le nouveau capital.

On note, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $R_n(N)$ l'événement : le joueur, ayant N francs au départ, est ruiné à l'issue du $n^{\text{ème}}$ lancer de la pièce. On note $u_n(N)$ la probabilité de cet événement.

Par convention $u_0(N) = 0$.

On note $R(N)$ l'événement le joueur, ayant N francs au départ, est ruiné. On note $u(N)$ la probabilité de cet événement.

Q1 a) Montrer que $\big(u_n(N)\big)_{n\geqslant 0}$ est un élément de E.

Dans ce qui suit on note F_N la fonction génératrice de la suite $\big(u_n(N)\big)_{n\geqslant 0}$. Ainsi : $\forall x \in [0,1],\ F_N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(N)\, x^n$.

b) Exprimer $u(N)$ en fonction de $F_N(1)$.

Q2 a) Calculer $u_1(1)$ et $u_2(1)$.

b) Soit k un élément de $[\![2,+\infty[\![$. Exprimer $u_k(1)$ en fonction de $u_{k-1}(2)$ (on pourra considérer le premier lancer).

c) En déduire que : $\forall x \in [0,1],\ F_1(x) = px\, F_2(x) + (1-p)\, x$.

Q3 Dans cette question $N = 1$.

a) Montrer que si n appartient à $[\![2,+\infty[\![$, $u_{n+1}(1) = p \sum_{j=0}^{n} u_j(1)\, u_{n-j}(1)$ (le capital devient 2, redevient 1, puis devient 0 non ?).

Montrer que ceci vaut encore pour $n = 1$.

b) En déduire que : $\forall x \in [0,1]\ px\big(F_1(x)\big)^2 - F_1(x) + (1-p)x = 0$.

c) Prouver que : $\forall x \in]0,1[,\ F_1(x) = \dfrac{1}{2px}\left[1 - \sqrt{1 - 4x^2p(1-p)}\right]$.

d) Calculer $u(1)$.

e) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Ecrire un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre $n+1$ de $t \to \sqrt{1+t}$.

En déduire que $u_{2n}(1) = 0$ et que $u_{2n+1}(1) = \dfrac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\ p^n(1-p)^{n+1}$.

Q4 a) Pour N dans $[\![2,+\infty[\![$ et k dans $\mathbb{N}^*$, trouver une relation entre $u_k(N)$, $u_{k-1}(N+1)$ et $u_{k-1}(N-1)$.

b) En déduire que pour N dans $[\![2,+\infty[\![$:

$$\forall x \in [0,1],\ px\, F_{N+1}(x) - F_N(x) + (1-p)x\, F_{N-1}(x) = 0.$$

c) Montrer que $\forall x \in [0,1], F_N(x) = \big(F_1(x)\big)^N$.

d) Calculer $u(N)$.

Q5 Ici $p \leqslant \frac{1}{2}$. X_N est la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires à la ruine du joueur.

Etudier l'existence de l'espérance de X_N et donner, si possible, sa valeur.

PARTIE III

Un joueur joue indéfiniment contre une banque selon le protocole suivant.

• La banque dispose d'un stock illimité de pièces qui donnent pile avec la probabilité p ($p \in]0,1[$) et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

• Au début du jeu la banque donne une pièce au joueur et celui-ci la lance. S'il obtient face la pièce lui est reprise et il est ruiné. S'il obtient pile il reprend sa mise et la banque lui remet une pièce supplémentaire. Ainsi s'achève la première partie.

• A la deuxième partie le joueur lance toutes les pièces en sa possession. Les pièce amenant face lui sont reprises par la banque et les pièces amenant pile sont rendues au joueur accompagnées d'un nombre de pièces supplémentaires égal au nombre de pièces ayant amené pile. Ainsi s'achève la seconde partie.

• Ainsi de suite, à chaque partie du jeu le joueur lance toutes les pièces en sa possession, la banque lui reprenant les pièces amenant face et doublant la mise pour les pièces amenant pile.

• Les résultats des différents lancers des pièces sont indépendants les uns des autres.

• On admet, pour des raisons de commodité d'écriture, que si à un certain moment le joueur est ruiné, alors le jeu continue tout de même le joueur lançant à partir de ce moment zéro pièces et en gagnant zéro.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces que possède le joueur à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ partie de ce jeu.

Q1 a) Déterminer la loi de X_1 et son espérance.

b) Déterminer la loi de X_2 et son espérance.

c) Montrer que X_n prend ses valeurs dans $E_n = \{2k ; k \in [\![0, 2^{n-1}]\!]\}$.

Q2 On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \displaystyle\sum_{k \in E_n} P(X_n = k)\, x^k$.

a) Déterminer G_1 et G_2.

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit i un élément de E_n et k un élément de E_{n+1}.

Calculer si possible : $p(X_{n+1} = k / X_n = i)$. En déduire que $G_{n+1} = G_n \circ G_1$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ G_{n+1}(x) = q + p\, \big(G_n(x)\big)^2$.

c) Calculer $E(X_n)$ pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ (on pourra remarquer que $E(X_n) = G_n'(1)$).

d) Calculer $E(X_n)$ pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$.

Q3 On pose, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n = p(X_n = 0)$.

a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge et trouver sa limite.

c) Trouver la probabilité que la banque parvienne à ruiner le joueur.
