SUJET 19

n est un élément de $\mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n.

On note $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires définies sur E, $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

On rappelle qu'un hyperplan de E est sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

On note Id_E l'endomorphisme identité de E.

On appelle **transvection** de E tout endomorphisme f de E tel que :

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \text{ est un hyperplan de E et } \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E).$$

L'hyperplan $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ est appelé la **base de** f et la droite $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$ est appelée **la direction** de f.

Partie I

$\boxed{\textbf{Q1}}$ On prend, dans cette question uniquement, $E = \mathbb{R}_2[X]$.

Soit f l'application définie sur E par : $\forall P \in E,\ f(P) = P + P'(0)(X^2 - 2)$.

a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

b) Ecrire la matrice de f par rapport à la base canonique $(1, X, X^2)$ de E.

c) Déterminer $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

d) En déduire que f est une transvection de E et donner sa base et sa direction.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Soit f un endomorphisme de E.

Montrer que f est une transvection de E si et seulement si $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ est un hyperplan de E et $(f - \mathrm{Id}_E)^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ Soit f une transvection quelconque de E.

a) Montrer que si λ est une valeur propre de f alors $\lambda = 1$ (on pourra utiliser $(f - \mathrm{Id}_E)^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, mais on démontrera ce que l'on affirme... ce n'est pas encore du cours).

b) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

c) Montrer que f est dans $\mathcal{GL}(E)$ et exprimer f^{-1} en fonction de f et de Id_E.

Montrer alors que f^{-1} est une transvection dont on donnera les éléments en fonction de ceux de f.

Partie II

$\boxed{\textbf{Q1}}$ a) Soit φ une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un hyperplan de E.

b) Soit H un hyperplan de E. Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle φ de E telle que $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$ (on pourra définir φ à partir d'une base que l'on construira astucieusement, et ici encore on montrera tout ce que l'on affirme).

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Soit φ une forme linéaire non nulle de E et u un vecteur non nul appartenant à $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

On considère l'application $f_{\varphi,u}$ de E dans E définie par : $f_{\varphi,u}\ :\ x \mapsto x + \varphi(x)u$.

Montrer que $f_{\varphi,u}$ est une transvection de E et en donner la base et la direction.

Q3 Réciproquement, soit f une transvection de E de base H et de direction D.

a) Montrer l'existence d'une forme linéaire non nulle φ de E et d'un vecteur non nul u de $\operatorname{Ker}\varphi$ tels que $f = f_{\varphi,u}$.

b) Déterminer l'application $f_{-\varphi,u} \circ f_{\varphi,u}$. Retrouver alors l'intégralité des résultats de PI Q3 c).

Q4 Dans cette seule question $n = 4$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E.

f est l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est une transvection et donner ses éléments. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Q5 a) Soit f une transvection de E. Soit λ un réel non nul.

Montrer que l'on peut trouver une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (M = I_n + \lambda\, E_{1,n} \ldots).$$

On pourra faire une brève analyse puis partir d'un vecteur non nul e_1 de $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E)$ et compléter ...).

b) Énoncer et établir une réciproque.