SUJET 6

PRÉLIMINAIRE

$H = \mathbb{K}[X]$. Un élément P de H est pair (resp. impair) si $P(-X) = P(X)$ (resp. $P(-X) = -P(X)$).

Q1 Montrer que l'ensemble H_1 (resp. H_2) des polynômes impairs (resp. pairs) de H est un sous-espace vectoriel de H.

Q2 Montrer que H_1 et H_2 sont supplémentaires.

Q3 Montrer que si P est un élément de H_1 (resp. H_2) alors P' appartient à H_2 (resp. H_1).

Q4 Soit $P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$ un élément de H.

Montrer que P est pair si et seulement si $\forall k \in [\![0, [\frac{r-1}{2}]]\!], a_{2k+1} = 0$.

Donner une condition nécessaire et suffisante analogue pour que P soit impair.

Q5 n est un élément de $\mathbb{N}$. $E = \mathbb{K}_{2n+1}[X]$, $E_1 = E \cap H_1$ et $E_2 = E \cap H_2$.

Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E. Donner une base simples de E_1 (resp. E_2).

Partie A

On considère $E = \mathbb{R}_5[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 5. On note E_1 l'ensemble des polynômes impairs de E et E_2 l'ensemble des polynômes pairs de E.

Q1 Justifier que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E (tout a déjà été fait).

On désigne par e_k $(0 \leqslant k \leqslant 5)$ les éléments de la base canonique de E de sorte que $e_k(X) = X^k$. On nommera pareillement "base canonique" de E_1 (resp. E_2) la base (e_1, e_3, e_5) (resp. (e_0, e_2, e_4)) de E_1 (resp. E_2).

Q2 a) Montrer que l'application σ qui à tout polynôme P de E_2 associe le polynôme $\sigma(P)$ défini par

$$\sigma(P)(X) = (X^2 + 1)P''(X) - XP'(X).$$

définit un endomorphisme de E_2.

b) Donner la matrice de σ dans la base (e_0, e_2, e_4) de E_2.

c) Déterminer le noyau de σ, ainsi que ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

d) σ est-il diagonalisable ?

Q3 a) Montrer que l'application s qui à tout polynôme P de E_2 associe le polynôme $s(P)$ défini par

$$s(P)(X) = (X^2 - 1)P''(X) + XP'(X).$$

définit un endomorphisme de E_2.

b) Donner la matrice de s dans la base (e_0, e_2, e_4) de E_2

c) Déterminer le noyau de s, ainsi que ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

d) s est-il diagonalisable ?

Q4 On considère l'application f qui à tout élément P de E_2 associe le polynôme $2XP(X) - P'(X)$.

a) Montrer que f est une application linéaire de E_2 dans E_1.

b) Déterminer la matrice de cette application linéaire relativement aux bases canoniques respectives de E_2 et E_1.

c) Montrer que f est un isomorphisme.

Partie B

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension quelconque. On désigne par E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On désigne par s un endomorphisme de E_2 et par f une application linéaire bijective de E_2 dans E_1.

A tout élément x de E, s'écrivant $x = x_1 + x_2$ avec x_1 élément de E_1 et x_2 élément de E_2 on associe :

$$F(x) = f^{-1}(x_1) + f(x_2) + s(x_2)$$

Q1 a) Montrer que F est un endomorphisme injectif de E dans E.

b) Montrer que F est surjectif. Déterminer F^{-1}.

Q2 a) On suppose que F admet une valeur propre λ. Soit x un vecteur propre de F associé à λ. $x = x_1 + x_2$ avec x_1 élément de E_1 et x_2 élément de E_2. Montrer que x_1 et x_2 sont non nuls et que x_2 est un vecteur propre de s.

b) Réciproquement on suppose que u est un vecteur propre de s associé à la valeur propre μ.

Montrer que les deux solutions $\lambda^{'}$ et $\lambda^{''}$ de l'équation $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda^2 - \mu\lambda - 1 = 0$ sont deux valeurs propres de F et trouver, en fonction de u, deux vecteurs propres v' et v'' de F associés à ces valeurs propres.

c) Montrer que si u_1, u_2, ..., u_k sont des vecteurs propres de s indépendants et associés à une même valeur propre μ de s, alors les vecteurs propres $v_1^{'}$, $v_2^{'}$, ..., $v_k^{'}$ (resp. $v_1^{''}$, $v_2^{''}$, ..., $v_k^{''}$) de F précédemment calculés sont indépendants.

On suppose désormais E de dimension finie, et on pose $n = \dim E_1$.

Q3 a) Justifier que $\dim E_1 = \dim E_2 = n$ et $\dim E = 2n$.

b) Soit μ_1, μ_2, ..., μ_p les valeurs propres réelles distinctes de s.

Prouver que F admet $2p$ valeurs propres (réelles) distinctes.

Montrer que si s est diagonalisable, F l'est aussi.

Partie C

Q1 On considère dans cette question $E = \mathbb{R}_5[X]$ et les applications s et f définies dans la partie A.

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de l'application F correspondante (définie dans la partie B).

Q2 On désire appliquer les résultats précédents au cas de la matrice définies par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ I_3 & B \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et où} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Construire un espace vectoriel E et des applications f et s permettant d'appliquer les résultats obtenus à la partie B.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?
