SUJET 9

PARTIE I

n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$. $E=\mathbb{R}_n[X]$. $\mathcal{E}=(1,X,\dots,X^n)$ est la base canonique de E.

$\forall k\in[\![0,n]\!],\ Q_k=\dbinom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}=\mathrm{C}_n^k\ X^k(1-X)^{n-k}$. On note $\mathcal{Q}$ la famille $(Q_0,Q_1,\dots,Q_n)$.

$F_0=1$ et $\forall k\in[\![1,n]\!],\ F_k=\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$. On note $\mathcal{F}$ la famille $(F_0,F_1,\dots,F_n)$.

Q1 a) Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de E.

b) Montrer que $\mathcal{Q}$ est une base de E et préciser la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{Q}$ ainsi que la matrice de passage de la base $\mathcal{Q}$ à la base $\mathcal{E}$ (on pourra remarquer que $X^j=[X+(1-X)]^{n-j}X^j$).

Q2 On considère l'application B définie sur E par :

$$\forall P\in E,\ B(P)=\sum_{k=0}^{n}P\Big(\frac{k}{n}\Big)Q_k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P\Big(\frac{k}{n}\Big)X^k(1-X)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\ P\Big(\frac{k}{n}\Big)X^k(1-X)^{n-k}$$

a) Montrer que B est un endomorphisme de E.

b) Calculer $B(P)$ lorsque P est un élément de $\mathbb{R}_1[X]$.

Q3 j est un élément de $[\![0,n]\!]$.

a) Pour x dans $\mathbb{R}$ on considère la fonction $\varphi: t\to(tx+(1-x))^n$. Calculer de deux façons différentes : $\varphi^{(j)}(1)$.

b) En déduire que : $\sum\limits_{k=0}^{n}F_j(k)\,Q_k(X)=F_j(n)\,X^j$.

Q4 Pour tout élément j de $[\![0,n]\!]$, on pose : $U_j(X)=\dfrac{1}{n^j}F_j(nX)$ et $\lambda_j=\dfrac{1}{n^j}F_j(n)$.

a) Montrer que $\mathcal{U}=(U_0,U_1,\dots,U_n)$ est une base de E.

b) Montrer que pour tout j dans $[\![0,n]\!]$: $B(U_j)=\lambda_jX^j$.

c) Prouver que B est un automorphisme de E.

Q5 a) Montrer que B est diagonalisable et préciser ses valeurs propres. On précisera notamment que 1 est valeur propre de B et on déterminera le sous-espace propre associé.

b) Justifier l'existence d'une unique famille $(H_2,H_3,\dots,H_n)$ de vecteurs de E telle que, pour tout k dans $[\![2,n]\!]$: H_k est de degré k, de coefficient dominant égal à 1 et vérifie : $B(H_k)=\lambda_kH_k$.

c) On pose $H_0=1$ et $H_1=X-1/2$. Montrer que $\mathcal{H}=(H_0,H_1,\dots,H_n)$ est une base de E et préciser la matrice de B dans cette base.

Q6 a) Prouver que pour tout k dans $[\![0,n]\!]$ on a : $H_k(1-X)=(-1)^k\,H_k$.

b) Que vaut $H_k(1/2)$ pour k impair appartenant à $[\![0,n]\!]$?

c) Calculer $H_k(0)$ et $H_k(1)$ pour k dans $[\![2,n]\!]$.

d) En déduire l'expression de H_2, ainsi que l'expression de H_3 si l'on suppose $n\geqslant 3$.

Q7 On note Δ l'application définie sur E par : $\forall P \in E,\ \Delta(P) = P(X + 1/n) - P(X)$.

a) Montrer que Δ est un endomorphisme de E.

b) Pour k dans $[\![1, n]\!]$ on note Δ^k la composée de k applications égales à Δ. $\Delta^0 = Id_E$. Justifier la formule :

$$\forall P \in E,\ P = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\Delta^k(P))(0)}{k!} F_k(nX) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\Delta^k(P))(0)}{k!} n^k\, U_k$$

c) En déduire que : $\forall P \in E,\ B(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(\Delta^k(P))(0)}{k!} n^k\, \lambda_k\, X^k$, puis que :

$$\forall P \in E,\ \forall j \in [\![0, n]\!],\ B(P)\Big(\frac{j}{n}\Big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\Delta^k(P))(0)}{k!} \lambda_k\, j^k$$

PARTIE II

On note $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel réel des applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application B_n sur $\mathcal{D}$ par :

$$\forall f \in \mathcal{D},\ \forall x \in [0, 1],\ B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\ f\Big(\frac{k}{n}\Big)\, x^k (1 - x)^{n-k}.$$

Q1 n appartient à $\mathbb{N}^*$. Montrer que B_n est un endomorphisme de $\mathcal{D}$. Est-il surjectif ?

Q2 En utilisant un résultat de probabilité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, 1],\ \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, (k - nx)^2\, x^k (1 - x)^{n-k} = nx(1 - x).$$

Q3 Soit f un élément de $\mathcal{D}$.

a) Justifier l'existence d'un réel K positif tel que :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|.$$

b) Soient n un élément de $\mathbb{N}^*$, x un élément de $[0, 1]$ et α un réel strictement positif.

On pose $I = \{k \in [\![0, n]\!] \mid |k - nx| \geqslant n\alpha\}$ et $J = \{k \in [\![0, n]\!] \mid |k - nx| < n\alpha\}$.

Montrer que si I n'est pas vide, on a :

$$\sum_{k \in I} \mathrm{C}_n^k\ x^k (1 - x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{n^2 \alpha^2}\ \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, (k - nx)^2\, x^k (1 - x)^{n-k}$$

En déduire que : $|f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant K\Big[\alpha + \dfrac{1}{4\alpha^2 n}\Big]$.

c) Conclure que l'on a le résultat :

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*})\, (\exists N \in \mathbb{N}^*)\, (\forall n \in \mathbb{N}^*)\, \big(n \geqslant N \Rightarrow (\forall x \in [0, 1],\ |f(x) - B_n(f)| \leqslant \varepsilon)\big)$$

Qu'en déduire ?

Q4 a) Soit f un élément de $\mathcal{D}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n\, f(t)\, \mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est nulle (on pourra considérer $\int_0^1 f(t)[f(t) - B_n(f)(t)]\, \mathrm{d}t$ et II Q3).

Soit g une application de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que :

- $\lim\limits_{+\infty} g = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} (e^t g'(t))$ existe et est finie.
- Pour tout réel x strictement positif : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 0.

Utiliser ce qui précède pour montrer que g est nulle.

Q5 Soient f un élément de $\mathcal{D}$ et n un élément de $\mathbb{N}^*$.

a) On considère $h : x \to xf(x)$. Montrer que :

$$\forall x \in [0,1],\ B_n(h)(x) = \frac{x(1-x)}{n}\ \big(B_n(f)\big)'(x) + xB_n(f)(x).$$

b) Montrer que :

$$\forall x \in [0,1],\ \big(B_n(f)\big)'(x) = n\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\Big(\frac{k+1}{n}\Big) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\right]\ \mathrm{C}_{n-1}^k\ x^k(1-x)^{n-1-k}$$

En déduire que si f est croissante sur $[0,1]$, il en est de même de $B_n(f)$.