TD-COURS 12 - FNPV L'OPUS 3 + (L'OPUS 5)/2 : FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{C}^1$

- Applications partielles.
- Dérivées partielles premières. Dérivées directionnelles premières. Fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Gradient.
- Les opérations de base et la première composition.
- Développement limité d'ordre 1.
- La seconde composition.
- Le théorème des accroissements finis.
- La condition nécessaire d'extremum local.
- Fonction continue sur un fermé borné.

Exercice 1 Quelques rappels.

Q1. Faire un rappel sur l'existence et la valeur éventuelle de $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A)$.

Q2. Faire un rappel sur les notions de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et de gradient.

Q3. Faire un rappel sur les opérations simple sur les dérivées partielles.

Exercice 2 De la continuité des applications partielles. FACULTATIF

f est une application d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ est un élément de Ω et i un élément de $[\![1,n]\!]$.

Q1. Montrer que pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$, le domaine de définition $\{t\in\mathbb{R}\mid(a_1,\dots,a_{i-1},t,a_{i+1},\dots,a_n)\in\Omega\}$ de $f_{A,i}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Q2. Montrer que si f est continue en A, pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$, $f_{A,i}$ est continue en a_i.

Q3. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Montrer que f n'est pas continue en $A=(0,0)$ mais que $f_{A,1}$ et $f_{A,2}$ sont continues en 0.

Exercice 3 Les fonctions usuelles.

Q1. k est un élément de $[\![1,n]\!]$ et p_k est la $k^{\text{ème}}$ projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Montrer que p_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer ses dérivées partielles.

Q2. $c\in\mathbb{R}$, $(q_1,q_2,\dots,q_n)\in\mathbb{N}^n$ et f : $(x_1,x_2,\dots,x_n)\to c\,x_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Q3. Montrer que toute fonction polynôme de n variables est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Q4. Montrer que toute fonction rationnelle de n variables est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.

Exercice 4 La première composition

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ une application de I dans $\mathbb{R}$.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que $f(\Omega)\subset I$.

Q1. i est élément de $[\![1,n]\!]$ et A un point de Ω. Montrer que si f admet en A une $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle première et si φ est dérivable en $f(A)$ alors $\varphi\circ f$ admet en A une $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle première et :

$$\boxed{\forall A\in\Omega,\ \frac{\partial(\varphi\circ f)}{\partial x_i}(A)=\varphi'(f(A))\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)}$$

Q2. A est un point de Ω. On suppose que $\nabla f(A)$ existe et que φ est dérivable en $f(A)$.

Montrer que $\nabla(\varphi \circ f)(A)$ existe et que $\boxed{\nabla(\varphi \circ f)(A) = \varphi'\left(f(A)\right) \nabla f(A)}$.

Q3. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, $\varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Exercice 5 **Existence et calcul de dérivées partielles pour des fonctions "simples"**.

Q1. Montrer que $f : (x, y, z) \to x^2 + y^2 - 2xy + 3yz$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et calculer ses dérivées partielles premières.

Q2. Montrer que $f : (x, y) \to e^{x^2+y^2} \sin(2x + y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.

Exercice 6 **Existence et calcul de dérivées partielles.**

$f : (x, y) \to 1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Q1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Q2. f admet-elle des dérivées partielles premières en $O = (0, 0)$?

Q3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7 **Existence et calcul de dérivées partielles.**

Dans cet exercice on identifie les éléments de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $A = (a_{i,j})$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (!). Pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$ on pose :

$$f(X) = \frac{1}{2}\,{}^tXAX - {}^tBX = \frac{1}{2} < AX, X > - < B, X >$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et que $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \nabla f(X) = AX - B$.

► **Contrôle.** n est un éléments de $[\![2, +\infty[\![$. $U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$.

Q1. Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Q2. $\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U,\ f(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \ln(x_j - x_i)$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et calculer ses dérivées partielles premières.

Exercice 8 **Extremum local**.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. A est un point de A.

Q1. Ecrire que f possède un maximum local en A.

Q2. Ecrire que f possède un minimum local en A.

Q3. Ecrire que f ne possède pas d'extremum local en A.

Exercice 9 **La condition nécessaire d'extremum local**.

Q1. Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$ et f est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ dérivable en un point a de Ω. Montrer que si f admet un extremum locale en a alors $f'(a) = 0$.

Q2. Ω est un **ouvert de $\mathbb{R}^n$** et f est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

A est un point de Ω et on suppose que f admet des dérivées partielles premières en A par rapport à toutes les variables.

Montrer que **SI** f admet un extremum local en $A : \forall i \in [\![1, n]\!],\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0$ ou $\boxed{\boxed{\nabla f(A) = 0_{\mathbb{R}^n}}}$.

Si A est un point de Ω où $\nabla f(A)$ existe et vaut $0_{\mathbb{R}^n}$ on dit que A esr **un point critique de f**

Exercice 10 **Recherche d'extremum**.

Q1. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que $A=(-1,-1)$ est le seul point critique de f.

c) Soit $H=(\alpha,\beta)$ un élément de $\mathbb{R}^2$. Calculer $f(A+H)-f(A)$. Conclure.

Q2. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=x^2+y^2+x^3$. Etudier les extremums de f.

Q3. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=3xy-x^3-y^3$. Etudier les extremums de f.

Exercice 11 **Recherche d'extremum.** Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère l'application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ f(X)=\sum_{k=1}^n x_k^2+\Big(1-\sum_{k=1}^n x_k\Big)^2$$

Q1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et qu'elle possède un unique point critique $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$.

Q2. Soit $H=(h_1,h_2,\dots,h_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Simplifier $f(A+H)-f(A)$.

Q3. Etudier les extremums de f.

Exercice 12 **Intermède** On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^x & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Q1. $O=(0,0)$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega=\mathbb{R}^2-\{O\}$.

Q2. a) Montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to O}\left(\sqrt{x^2+y^2}\,\ln(x^2+y^2)\right)=0$. En déduire que $\lim\limits_{(x,y)\to O}\left(x\,\ln(x^2+y^2)\right)=0$.

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Q3. Etudier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(O)$ et de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(O)$.

Exercice 13 *Recherche d'extremum. Exercice de contrôle.*

Q1. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=x^2+y^2+(x+y-1)^2$. Etudier les extremums de f.

Q2. $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=4\,x^3\,y+6\,x^2\,y^2+4\,x\,y^3$. Etudier les extremums de f.

Q3. $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=4\,x^2+y^2+3\,z^2-4\,x\,z-2\,y\,z-4\,x+2$. Etudier les extremums de f.

Exercice 14 **Fonction continue sur un fermé borné**.

$F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leqslant 0,\ y\leqslant 0 \text{ et } x+y\geqslant -3\}$ et $\forall (x,y)\in F,\ f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$.

Q0. Dessiner F. Montrer que F est un fermé borné.

Q1. Montrer que f possède un maximum et un minimum absolus sur F.

Q2. On pose $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<0,\ y<0 \text{ et } x+y>-3\}$. Montrer que Ω est ouvert. Quelle est la valeur du minimum (resp. maximum) de f s'il est atteint en un point de Ω ?

Q3. Etudier f sur $F-\Omega$.

Q4. Déterminer le maximum et le minimum de f.

Exercice 15 *Fonction continue sur un fermé borné. Exercice de contrôle*

f est l'application de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} & \text{si } (x,y) \neq (1,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

Q1. Montrer que f est continue sur $[0,1]^2$ (si nécessaire on pourra remarquer que $1-x \leqslant 1-xy$ pour...).

Q2. En déduire que f possède un maximum M et un minimum m sur $[0,1]^2$.

Q3. Préciser m et les points où f prend cette valeur.

Q4. Montrer que si $f(x,y)=M$ nécessairement (x,y) appartient à $]0,1[^2$. En déduire la valeur de M.

Exercice 16 **Unicité d'un développement limité d'ordre 1**.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. A appartient à Ω et f est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ admettant un développement limité d'ordre 1 en A.

Ainsi il existe $n+1$ réel λ_0, λ_1,..., λ_n tels que : $f(X) = \lambda_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k(x_k - a_k) + o(\|X-A\|)$

Q1. Montrer que $\lambda_0 = f(A)$ et que f est continue en A.

Q2. Montrer que pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A)$ existe et vaut λ_i.

En particulier ceci prouve l'unicité du développement limité d'ordre 1 de f en A.

La fonction affine $(h_1,h_2,\dots,h_n) \to f(A) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(A)\, h_k$ est **la fonction affine tangente à f en A**.

Son graphe est **l'hyperplan affine tangent en A au graphe de f**.

► **Contrôle** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Montrer que f est continue et possède des dérivées partielles premières en $O=(0,0)$ mais ne possède pas de développement limité d'ordre 1 en ce point.

Exercice 17 **Existence d'un dl 1 pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.** **FACULTATIF**.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. f est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. $A=(a,b)$ est un élément de Ω. On se propose de montrer que :

$$f(A+H) = f(A) + < \nabla f(A), H > + \mathrm{o}\left(\|H\|\right)$$

$$\text{ou que}\quad f(a+\alpha, b+\beta) = f(A) + \alpha\,\frac{\partial f}{\partial x}(A) + \beta\,\frac{\partial f}{\partial y}(A) + \mathrm{o}(\|(\alpha,\beta)\|).$$

Nous aurons ici montré que f possède un dl 1 au voisinage de A donné par les égalités précédentes.

On note Δ la fonction $(\alpha,\beta) \to f(a+\alpha,b+\beta) - f(A) - \alpha\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) - \beta\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)\cdot$

Il convient de montrer que $\lim\limits_{H\to O} \dfrac{\Delta(H)}{\|H\|} = 0$.

C'est à dire que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \eta \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall H \in D_\Delta,\ H \in B(O,\eta) \Rightarrow\ |\Delta(H)| \leqslant \varepsilon\,\|H\|$.

Soit ε un réel positif.

Q1. Montrer qu'il existe un réel strictement positif η' tel que :

$$B(A,\eta') \subset \Omega,\ \forall X \in B(A,\eta'),\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(X) - \frac{\partial f}{\partial x}(A)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \left|\frac{\partial f}{\partial y}(X) - \frac{\partial f}{\partial y}(A)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Q2. a) $\eta = \frac{\eta'}{\sqrt{2}}$. Vérifier que $B(A,\eta) \subset]a-\eta, a+\eta[\times]b-\eta, b+\eta[\subset B(A,\eta') \subset \Omega$.

On a également $B(O,\eta) \subset]-\eta,\eta[\times]-\eta,\eta[\subset B(O,\eta')$.

b) Soit $H = (\alpha,\beta)$ un élément de $B(O,\eta)$. On pose $\forall x \in]$a-η,a+$\eta[$, $\varphi(x) = f(x, b+\beta)$

Montrer que φ est dérivable sur $]a-\eta, a+\eta[$ et calculer φ'.

Montrer alors qu'il existe c dans $]a-\eta, a+\eta[$ tel que que $f(a+\alpha, b+\beta) - f(a, b+\beta) = \alpha\, \dfrac{\partial f}{\partial x}(c, b+\beta)$.

Montrer de manière analogue qu'il existe d dans $]b-\eta, b+\eta[$ tel que que $f(a, b+\beta) - f(a,b) = \beta\, \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,d)$.

Q3. Conclure.

Exercice 18 **dl1**.

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x^3 + 2xy + y^3 - z^3 + 2xz.$

Q1. Montrer que f est possède un développement limité d'ordre 1 au voisinage de tous les points de $\mathbb{R}^3$.

Q2. Ecrire le développement limité d'ordre 1 de f en $B = (1,2,3)$.

Exercice 19 **Un contre-exemple** **FACULTATIF**

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f possède un développement limité d'ordre 1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 20 **L'aspect simple de la seconde composition**

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
u_1, u_2, ..., u_n sont n applications dérivables de I dans $\mathbb{R}$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{de classe } \mathcal{C}^1}$.

On suppose encore que : $\forall t \in I,\ \big(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\big) \in \Omega$.

Q1. Montrer que $g : t \to f\big(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\big)$ est une application dérivable sur I et que pour tout t dans I :

$$g'(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k'(t)\, \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\big)$$

Q2. Montrer que si u_1, u_2, ..., u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Exercice 21 **Dérivées directionnelles premières**

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \Omega}$.

A est un point de Ω et $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que le domaine de définition de la fonction $g : t \to f(A + t\,U)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Q1. Montrer que $g : t \to f(A + t\,U)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_g et que :

$$\forall t \in D_g,\ g'(t) =< \nabla f(A + t\,U), U >= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(A + tU)\,u_k.$$

Q2. En particulier, si U n'est pas nul, montrer que f admet une dérivée partielle première en A dans la direction de U qui vaut :

$$f'_U(A) =< \nabla f(A), U >= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(A)\,u_k.$$

Exercice 22 **Théorème des accroissements finis**

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$ de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^1}$ sur Ω.

A et $H = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$ tels que le segment $[A, A + H]$ soit contenu dans Ω.

Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $]0, 1[$ tel que :

$$f(A + H) = f(A) + < \nabla f(A + \theta\,H), H > \text{ ou } f(A + H) = f(A) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(A + \theta\,H)\,h_k.$$

Q2. A et B sont deux éléments distincts de $\mathbb{R}^n$ tels que le segment $[A, B]$ soit contenu dans Ω. Adapter le résultat précédent à cette nouvelle situation.

EN PLUS

Exercice 23 **Fonction convexe**.

Q1. Faire un rappel sur les fonctions numériques convexes.

> D est un convexe de $\mathbb{R}^n$ et f est une application de D dans $\mathbb{R}$.
>
> On dit que **f est convexe sur D** si : $\forall \lambda \in [0, 1],\ \forall (A, B) \in D^2,\ f\big(\lambda A + (1 - \lambda)B\big) \leqslant \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B)$.
>
> On dit que f est **concave sur D** si $-f$ est convexe sur D.

▶ Dans tout l'exercice, Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall (A, B) \in \Omega^2,\ \forall t \in [0, 1],\ \varphi_{AB}(t) = f\big(t\,A + (1 - t)\,B\big) = f\big(B + t(A - B)\big)$.

Q2. Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tout couple (A, B) d'éléments de Ω, φ_{AB} est convexe.

Q3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

a) A et B sont deux éléments de Ω. Montrer que φ_{AB} est dérivable sur $[0, 1]$ et que pour tout élément t de $[0, 1]$,

$$\varphi'_{AB}(t) =< \nabla f\big(B + t(A - B)\big), A - B >=< \nabla f\big(t\,A + (1 - t)\,B\big), A - B > .$$

b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f est convexe sur Ω.

ii) $\forall (A, X) \in \Omega^2,\ f(X) \geqslant f(A) + < \nabla f(A), X - A >$.

iii) $\forall (X, Y) \in \Omega^2,\ < \nabla f(Y), Y - X > \geqslant < \nabla f(X), Y - X >$ ou $< \nabla f(Y) - \nabla f(X), Y - X > \geqslant 0$.

c) A est un point de Ω. Montrer que si A est un point critique de f alors f admet en A un minimum global.

Exercice 24

$\forall (x,y,z),\ f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{2}+xyz+y-z$. Eudier les extremums de f (un point critique et rien).

Exercice 25 On pose $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=x^2+y^2-2xyz^2$.

Q1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

Q2. Trouver l'ensemble des points critiques de f (il y en a une infinité).

Q3. $A=(0,0,0)$. Montrer que f possède un extremum local en A $(2\alpha\,\beta\leqslant\alpha^2+\cdots)$.

Q4. $B=(0,0,2)$. Montrer que f ne possède pas d' extremum local en B $(\beta=\alpha$ et $\beta=\cdots)$.

Exercice 26 $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=xy-x^2y-xy^2$. Etudier les extremums de f.
