TD 1 B INTÉGRATION 2011-2012

Exercice 1 ESCP 98 On pose $D =]0, +\infty[$ et $\forall x \in D,\ F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

Q1. Justifier la définition de F.

Q2. Etudier le sens de variation de F.

Q3. A l'aide d'un changement de variable, montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et vérifier que :

$$\forall x \in D,\ F'(x) + F(x) = \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}$$

Q4. Montrer que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e-1}{x}\cdot$

Q5. Déterminer les limites de F aux bornes de son domaine.

Q6. **Facultatif** Trouver un équivalent de F en 0.

Exercice 2 Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

On considère l'application f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,u_n = I$.

Exercice 3 **ESCP 2008 1.5** Soient deux nombres réels a et b tels que $0 < a < b$.

Pour tout nombre réel $x > 0$ on définit : $f(x) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{e^t - 1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Q1. a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $f(x) \geqslant \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

b) Montrer que la fonction f est croissante.

c) Montrer que f admet une limite lorsque x tend vers 0^+ (on ne cherchera pas à calculer cette limite).

Q2. a) Montrer que, pour tout réel k strictement supérieur à 1, il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, \varepsilon]$, on a : $t \leqslant e^t - 1 \leqslant kt$.

b) En déduire la limite de f en 0^+.

3. a) Montrer que $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite lorsque x tend vers 0^+. Calculer cette limite.

b) Retrouver le résultat de la question 2. b) à l'aide de la question précédente.

Exercice 4 **ESCP 2002 21** Q1. Soit a un réel appartenant à l'intervalle $[0,1]$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^a \frac{t^n e^t}{1+t^n}\,dt \leqslant \frac{e}{n+1}\cdot$

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^a \frac{e^t}{1+t^n}\,dt = e^a - 1$.

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé. On note F_n l'application de $[0, +\infty[$ dans lui-même définie par $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{1+t^n}\,dt$.

a) Montrer que l'on peut trouver un réel A strictement positif tel que : $\forall t \in [A, +\infty[,\ \dfrac{e^{\frac{t}{2}}}{1+t^n} \geqslant 1$.

En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x) = +\infty$. Montrer que F_n est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

On note x_n sa bijection réciproque ; ainsi, pour tout réel y positif ou nul, $x_n(y)$ est l'unique réel positif ou nul tel que $\displaystyle\int_0^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n}\,dt = y$.

b) Préciser le sens de variation de la fonction $x_n : y \mapsto x_n(y)$ ainsi que sa limite en $+\infty$.

Q3. Dans cette question y est fixé tel que $y < e-1$.

a) Démontrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $x_n(y) < 1$.

b) Pour $n \geqslant N$, comparer les trois réels $\displaystyle\int_0^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n}\,dt$, $\displaystyle\int_0^{x_{n+1}(y)} \frac{e^t}{1+t^{n+1}}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{x_{n+1}(y)} \frac{e^t}{1+t^n}\,dt$.

En déduire les variations de la suite $(x_n(y))$ pour $n \geqslant N$ et la convergence de la suite $(x_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$. On note ℓ sa limite.

c) Démontrer, pour $n \geqslant N$, l'inégalité $\displaystyle\left|\int_\ell^{x_n(y)} \frac{e^t}{1+t^n}\,dt\right| \leqslant e|x_n(y)-\ell|$

En déduire l'expression de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\ell \frac{e^t}{1+t^n}\,dt$ en fonction de y puis l'expression de ℓ en fonction de y.

Exercice 5 Q1. Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R},\ |e^u - 1 - u| \leqslant \dfrac{u^2}{2}\, e^{|u|}$.

Q2. f est une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

a) Montrer qu'il existe une constante positive λ telle que :

$$\forall t \in [0,1],\ \forall \alpha \in [0,1],\ |(f(t))^\alpha - 1 - \alpha \ln(f(t))| \leqslant \lambda\alpha^2$$

(on pourra remarquer que $\ln\circ f$ est continue sur le segment $[0,1]$).

b) Prouver que $\displaystyle\lim_{\alpha\to0^+} \left(\frac{1}{\alpha}\left[\int_0^1 (f(t))^\alpha\,\mathrm{d}t - 1\right]\right) = \int_0^1 \ln(f(t))\,\mathrm{d}t$

En déduire que : $\displaystyle\lim_{\alpha\to0^+} \left(\int_0^1 (f(t))^\alpha\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\int_0^1 \ln(f(t))\,\mathrm{d}t}$.

Exercice 6 **Intégrale de Poisson**.

On considère la fonction numérique de la variable réelle

$$f : x \to \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\,\mathrm{d}t.$$

Q1. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R} - \{-1,1\}$, $f(x)$ a un sens. *Dans la suite x est un réel différent de 1 et -1.*

Q2. a) Montrer que f est paire.

b) Montrer que : $2f(x) = f(-x) + f(x) = f(x^2)$.

c) Montrer que si x n'est pas nul : $f(1/x) = f(x) - \pi\ln x^2$.

Q3. a) Montrer que si x est strictement positif : $\pi\ln(x-1)^2 \leqslant f(x) \leqslant \pi\ln(x+1)^2$.

b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$.

c) Exprimer pour n dans $\mathbb{N}$, $f(x)$ en fonction de $f(x^{2^n})$. En déduire que f est nulle sur $[0,1[$.

Q4. Déterminer $f(x)$.
