TD 2A SÉRIES 2010-2012

Exercice 1 Règles de comparaison 1

Représenter graphiquement l'ensemble des points d'un plan rapporté à un repère othonormé tel que la série de terme général $u_n = \dfrac{n^x}{n^y+1}$ converge.

Exercice 2 Règles de comparaison 2

Q1. Donner un dl4 au voisinage de 0 de $x \to \cos x$, $x \to \ln(1+x)$ et $x \to \ln(\cos x)$.

Q2. On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\cos \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{e}}\cdot$

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

b) Étudier la nature de la série de terme général u_n

Exercice 3 Série de terme général $\mathbf{u_{n+1} - u_n}$ et suite de terme général $\mathbf{u_n}$

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\cdots(1+\sqrt{n})}$.

Q1. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \sqrt{n}\,u_n$.

Montrer que la série de terme général $w_n = \ln(v_n) - \ln(v_{n-1})$ diverge et en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Q2. Montrer que si $k \in [\![2, +\infty[\![: u_k = \sqrt{k-1}\,u_{k-1} - \sqrt{k}\,u_k$. En déduire que la série de terme général u_n converge et donner sa somme.

Exercice 4 Série de fonction. ECRICOME 2008

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\cdot$$

Q1 a) Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.

b) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

Q2 Montrer que, pour tout réel positif x, la série de terme général $f'_n(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.

Q3 *Étude de la dérivabilité de F.*

a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varphi(t) = \dfrac{1}{t}\cdot$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\forall (x, x_0) \in [n, +\infty[^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0)\varphi'(x_0)| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{n^3}\cdot$$

b) En déduire, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$, la nature de la série de terme général $|f_n(x+h) - f_n(x) - hf'_n(x)|$.

c) Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \neq 0$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$,

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant K|h|$$

d) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que $F' = G$.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ *Recherche d'un équivalent en* $+\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

a) Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$: $f_{k+1}(x) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant f_k(x)$

b) En déduire que, pour $n \geqslant 2$: $\displaystyle\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t.$

c) En déduire que : $\ln(1+x) \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{x}{x+1} + \ln(1+x).$

d) Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 5 ESCP 96 E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

f est un élément de E. Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, on pose : $I_n(f) = \displaystyle\int_0^1 t^n\, f(t)\, \mathrm{d}t.$

Q1. Montrer que la suite de terme général $I_n(f)$ converge ver 0.

Q2. a) Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k(f) = \int_0^1 \frac{1+(-1)^n t^{n+1}}{1+t} f(t)\, \mathrm{d}t$$

En déduire que la série de terme général $(-1)^n I_n(f)$ converge et écrire sa somme sous forme intégrale.

b) Qu'obtient-on si : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = 1$?

c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ en posant : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sqrt{x}$

Q3. Ici on s'intéresse à la convergence de la suite de terme général $nI_n(f)$.

a) Soit α un élément de $]0,1[$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \int_0^\alpha t^n f(t)\, \mathrm{d}t = 0.$

b) Ici $f(1) = 0$. On se donne un réel ε strictement positif. Montrer que l'on peut trouver α dans $]0,1[$ tel que :

$$\left| n \int_\alpha^1 t^n f(t)\, \mathrm{d}t \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n(f)$

c) Etudier le cas général en se ramenant au cas particulier précédent.

Q4. Ici $\forall x \in [0,1],\ f(x) = e^{-x}$.

Calculer $I_n(f)$ pour tout élément n de $\mathbb{N}$. Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$
