TD 9 A ALGÈBRE BILINÉAIRE 21-11-2011

EXERCICE ECRICOME 97

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à deux. E est un espace vectoriel euclidien de dimension n. On note Id_E l'application identique de E dans lui-même.

Lorsque x et y sont deux vecteurs de E, le produit scalaire de x par y s'écrit $< x, y >$ et $\|x\|$ représente la norme de x.

Quand u est un vecteur *non nul* de E, on définit l'application φ_u de E dans lui-même par

$$\forall x \in E \quad \varphi_u(x) = 2\frac{< x, u >}{< u, u >}u - x$$

Dans Q1, Q2, Q3 et Q4, u est un vecteur non nul de E.

Q1 Montrer que φ_u est un endomorphisme involutif de E (c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $\varphi_u \circ \varphi_u = \mathrm{Id}_E$).

Q2 Démontrer que u est un vecteur propre de φ_u associé à une valeur propre que l'on précisera.

Q3 Etablir que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que : $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ < \varphi_u(x_1), \varphi_u(x_2) >=< x_1, x_2 >$.

En déduire que φ_u conserve la norme, c'est-à-dire que $\forall x \in E,\ \|\varphi_u(x)\| = \|x\|$.

Q4 On désigne par $\mathcal{D}_u$ la droite vectorielle de base u, et par $\mathcal{H}_u$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à u (autrement dit, $\mathcal{H}_u = \mathcal{D}_u^{\perp}$, supplémentaire orthogonal de $\mathcal{D}_u$).

a) Montrer que $\mathcal{H}_u$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 pour φ_u.

b) φ_u est-il diagonalisable ?

c) t étant un réel non nul, comparer les applications φ_u et φ_{tu}.

Q5 *Etude d'une réciproque.* On suppose que ψ est un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant

$$\forall y \in \Delta \quad \psi(y) = y \quad \text{et} \quad \forall z \in \Delta^{\perp} \quad \psi(z) = -z$$

a) Montrer que ψ est involutif et conserve le produit scalaire.

b) Établir qu'il existe au moins un vecteur u non nul de Δ tel que l'on ait : $\psi = \varphi_u$.

c) Soit $\mathcal{M} = (m_{i,j})$ la matrice de ψ dans une base orthonormé $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.

Soit $a_{i,j}$ (où i et j désignent des entiers compris entre 1 et n) le coefficient de la i-ième ligne et j-ième colonne de la matrice ${}^t\mathcal{M}\mathcal{M}$.

Montrer que $a_{i,j} =< \psi(e_i), \psi(e_j) >$. En déduire que : ${}^t\mathcal{M}\mathcal{M} = I_n$. où I_n désigne la matrice unité d'ordre n.

PROBLÈME

LYON 2002 PB 2 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, dont le produit scalaire est noté $< \ ,\ >$.

L'objectif du problème est d'étudier les endomorphismes u de E tels que : $\forall x \in E,\ < u(x), x >= 0$.

Les endomorphismes vérifiant cette propriété sont appelés endomorphismes antisymétriques.

Ce n'est pas la définition naturelle qui est : $\boxed{\forall (x, y) \in E,\ < f(x), y >= - < x, f(y) >}$ *; mais patiente...*

PARTIE I : Étude d'un exemple

Dans cette partie, E est l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que $(1, X, X^2)$ est une base de E.

On considère l'application $\varphi :\ E^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout couple (P, Q) d'éléments de E par :

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

Q1 Vérifier que φ est un produit scalaire. **faire les deux derniers points**

Dans cette première partie, on considère que E est muni de ce produit scalaire.

Q2 On considère l'endomorphisme u de E défini pour tout P de E par :

$$u(P) = 2P'(0)X^2 - \big(P(1) + P(-1)\big)X.$$

a) Vérifier : $\forall P \in E,\ 2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0.$

b) En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique de l'espace vectoriel euclidien E.

Q3 Soients $P_1 = \dfrac{1}{2}(X^2 + X)$ et $P_2 = \dfrac{1}{2}u(P_1)$.

a) Vérifier que P_1 est un vecteur propre de u^2 et que la famille (P_1, P_2) est orthonormale.

b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.

c) Déterminer une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et un nombre réel a tels que la matrice associée à u relativement à cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTIE II : Caractérisations des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme de E.

Q1 Pour tout couple (x, y) de E^2, développer $< u(x + y), x + y >$.

En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2,\ < u(x), y >= - < x, u(y) >$.

Q2 On suppose dans cette question que la dimension n de E est non nulle.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, et $M = (\, m_{i,j}\,)_{i \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$.

a) Montrer : $\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ m_{i,j} =< e_i, u(e_j) >$.

b) En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice M associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tM = -M$.

PARTIE III : Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques

Cette partie est une mosaïque de petits raisonnements d'algèbre linéaire aussi simples que classiques. Donc se forcer un peu...

Soit u un endomorphisme antisymétrique non nul de E.

On pourra utiliser la caractérisation obtenue dans la question **II.1.**

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Soit λ un nombre réel. Montrer que si λ est valeur propre de u, alors $\lambda = 0$.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Montrer que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E.

En déduire que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(u^2)$.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ Montrer que u^2 est un endomorphisme symétrique de E et que toute valeur propre de u^2 est négative ou nulle.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ a) Montrer que u^2 admet au moins une valeur propre non nulle.
Soient x un vecteur propre de u^2 associé à une valeur propre non nulle, et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x, u(x))$.

b) Montrer que F est un plan vectoriel stable par u.

c) Montrer que $F^\perp$, le supplémentaire orthogonal de F, est stable par u.

d) On munit $F^\perp$ du produit scalaire $<\ ,\ >_1$ défini pour tout couple (x, y) d'éléments de $F^\perp$ par

$$< x, y >_1 = < x, y >$$

On définit l'endomorphisme u_1 de $F^\perp$ par : $\quad \forall x \in F^\perp,\ u_1(x) = u(x)$.

Montrer que u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$ et que $\operatorname{Im} u = F \oplus \operatorname{Im} u_1$.

$\boxed{\textbf{Q5}}$ **facultatif** Montrer que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est pair. On pourra faire une récurrence sur la dimension de E.

PARTIE IV : Application

Dans cette partie, E est un espace vectoriel euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de E.

Soit u l'endomorphisme de E associé, relativement à la base $\mathcal{B}$, à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Montrer que u est un endomorphisme antisymétrique de E.

Vérifier que le vecteur $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ est vecteur propre de u^2.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\big(f_1, u(f_1)\big)$. Déterminer une base orthonormale de F et une base orthonormale de $F^\perp$.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ En déduire une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ de E et deux nombres réels a et b tels que la matrice associée à u relativement à $\mathcal{B}_0$ soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$.

TD 9 B ALGÈBRE BILINÉAIRE 21-11-2011

Exercice 1 **D'après ESCP 98 23** **Matrice symétrique**

A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que : ${}^tAA = A\,{}^tA$ et qu'il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ tel que A^p soit la matrice nulle.

Montrer que $S = {}^tAA$ est diagonalisable. Calculer S^p et en déduire que S est la matrice nulle et A également.

Exercice 2 E est un espace préhilbertien réel et f est un automorphisme de E tel que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ < x, y >= 0 \Rightarrow < f(x), f(y) >= 0.$$

Q1. Soit P un plan de E. Montrer qu'il existe un réel strictement positif α_P tel que $\forall x \in P,\ \|f(x)\| = \alpha_P \|x\|$ (on pourra considérer une base orthonormale).

Q2. Montrer qu'il existe un réel strictement positif α tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \alpha \|x\|$.

Q3. Montrer que $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), f(y) >= \alpha^2 < x, y >$.

Exercice 3 E est un espace vectoriel euclidien de dimension n non nulle. f_1, f_2,..., f_p sont p endomorphismes symétriques de E tels que :

$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{rg} f_k = n \text{ et } \forall x \in E,\ \sum_{k=1}^{p} < f_k(x), x > = \|x\|^2$$

Q1. a) Montrer que si g est un endomorphisme symétrique de E tel que $\forall x \in E,\ < g(x), x >= 0$ alors g est l'endomorphisme nul (on pourra utiliser $x + y$! !).

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} f_k = id_E$.

Q2. a) Montrer que E est somme directe des sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} f_1$, $\operatorname{Im} f_2$, ..., $\operatorname{Im} f_p$.

b) Montrer que $\forall x \in E,\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ f_i(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} f_k(f_i(x))$.

c) Montrer que f_1, f_2, ..., f_p sont des projecteurs orthogonaux.

Exercice 4 **ESCP 1999 2.20** **Maximum de la somme des coefficients d'une matrice orthogonale**.

Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$. On note $E = O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A telles que ${}^tAA = I_n$.

Q1. Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $O_n(\mathbb{R})$. Soit X la matrice à n lignes et une colonne définie par : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer ${}^tXAX$.

Q2. Déterminer la valeur de $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{(a_{i,j}) \in E} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$.

Exercice 5 **ESCP 2004 2.8** **Symétrie orthogonale. Endomorphisme orthogonal.**

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, $a \in E$ de norme 1.

On désigne par f_a l'application de E dans lui-même définie par : $\forall x \in E, f_a(x) = x - 2\langle x, a\rangle a$.

Q1. Montrer que f_a est un automorphisme de E et déterminer son automorphisme réciproque.

Q2. Montrer que f_a est diagonalisable.

Q3. Montrer que f_a est un endomorphisme orthogonal (c'est-à-dire que l'on a : $\forall (x, y) \in E^2, \langle f_a(x), f_a(y)\rangle = \langle x, y\rangle$).

Q4. Montrer que si g est un endomorphisme orthogonal de E, alors $g \circ f_a \circ g^{-1} = f_{g(a)}$.

Q5. Soit b un vecteur unitaire de E.

a) Montrer que $f_a = f_b$ si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$.

b) Déterminer les vecteurs unitaires c de E tels que $f_a \circ f_c = f_c \circ f_a$.

Exercice 6 **ESCP 2004 2.9** **EVE. Produit tensoriel.**

On considère $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) muni de sa base canonique et du produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$. On désigne par $\|.\|$ la norme associée. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $u \otimes v$ l'endomorphisme défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (u \otimes v)(x) = \langle x, v\rangle\, u.$$

Q1. a) Soient u, v deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$; quelle est l'image de l'endomorphisme $u \otimes v$? Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres de $u \otimes v$. Quand est-il diagonalisable ?

b) u_1, v_1, u_2 et v_2 sont des éléments de $\mathbb{R}^n$. Prouver que $(u_1 \otimes v_1) \circ (u_2 \otimes v_2) = \langle u_2, v_1\rangle (u_1 \otimes v_2)$.

c) Soit λ un réel qui n'est pas une valeur propre de $u \otimes v$; montrer que l'inverse de l'endomorphisme $\lambda Id - u \otimes v$ est donné par

$$(\lambda Id - u \otimes v)^{-1} = \frac{1}{\lambda} Id + \frac{1}{\lambda\,(\lambda - \langle u, v\rangle)}\, u \otimes v$$

d) On note ${}^t f$ l'adjoint de l'endomorphisme f, il est determiné par l'égalité

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, {}^t f\,(y)\rangle$$

valable pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^n$.

Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^n$. Quel est l'adjoint de l'endomorphisme $u \otimes v$?

e) Soient u_1, v_1, u_2, v_2 quatre vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$; sous quelles conditions a-t-on $u_1 \otimes v_1 = u_2 \otimes v_2$?

Q2. Soient g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et u, v deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$. Montrer que g commute avec $u \otimes v$ si et seulement si il existe un réel α tel que $g(u) = \alpha u$ et ${}^t g(v) = \alpha v$.

Exercice 7 **ESCP 2001 9 Pseudo inverse.**

Soit $p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels. Pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note ${}^t A$ la matrice transposée de A.

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on pose : $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{k=1}^{p} x_k y_k$.

Si $x \in \mathbb{R}^p$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ la norme euclidienne de x. Enfin, si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$, on note $E^\perp$ l'orthogonal de E.

Q1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\mathrm{Im}(A) \subset [\mathrm{Ker}({}^t A)]^\perp$ et que $[\mathrm{Im}(A)]^\perp \subset \mathrm{Ker}({}^t A)$. b) Montrer que $\mathrm{Im}(A) = [\mathrm{Ker}({}^t A)]^\perp$.

Q2 On considère une matrice A quelconque de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Montrer que tout vecteur $x \in \mathbb{R}^p$ se décompose de manière unique sous la forme : $x = x' + Ax''$, avec $x' \in \mathrm{Ker}({}^tA)$ et $x'' \in \mathrm{Im}({}^tA)$.

On pose alors $x'' = u(x)$. Vérifier que l'on définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$.

Q3. On note B la matrice associée à u dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Montrer que AB est la matrice de la projection orthogonale sur l'image de A. Que dire de BA.