TD-COURS 2 REVISIONS D'ANALYSE 2 (SÉRIES... et SUITES) 2011-2012

- Les définitions usuelles.
- Les propriétés usuelles.
- Les séries du programme.
- Les séries à termes positifs.
- La convergence absolue.
- Les plus (séries alternées. Produit de Cauchy. Séries de Bertrand. Série de terme général $u_{n+1} - u_n$).
- Séries et intégrales généralisées.

Exercice 1 **Combinaison linéaire de séries convergentes. Séries du programme**. ★

Q1. Donner un résultat général concernant une combinaison linéaire de séries convergentes.

Q2. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n!}\cdot$ Montrer que cette série est convergente et calculer sa somme. $(4e)$

Q3. Même chose avec $u_n = \dfrac{n^2+(-1)^n}{3^n}\cdot$ 9/4

Q4. r est dans $\mathbb{N}^*$ et q est dans $]0,1[$. Même chose avec : $u_n = 1-(1-q^n)^r$.

► **En plus ?** r est dans $\mathbb{N}^*$ et q est dans $]0,1[$. $v_n = n\big((1-q^n)^r - (1-q^{n-1})^r\big)$.

Exercice 2 **Une série importante**. ★

α est un réel et x est un réel différent de -1. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = n^\alpha\, x^n$.

► **En plus ?** Traiter les cas $x=-1$ par des considérations de séries alternées (ce sera fait plus loin...)

Exercice 3 **La C.N.S. de convergence d'une série à termes positifs. Espérance d'une var** . ★

X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

Q1. Montrer que si n est dans $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,P(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) - nP(X>n)$.

Q2. Montrer que X possède une espérance $E(X)$ si et seulement si la série de terme général $p(X>k)$ converge.

Montrer en cas d'existence que :

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X>k)}$$

Q3. Application On considère r nénuphars (ou nénufars) non fleuris dans un étang. La probabilité pour qu'un nénuphar fleurisse une année est p $(0<p<1)$. Si un nénuphar fleurit une année il fleurit l'année suivante. De plus les nénuphars fleurissent de manière indépendante.

X est la variable aléatoire égale au nombre d'années nécessaires pour que tous les nénuphars soient fleuris.

Montrer l'existence et donner la valeur de $E(X)$.

► **En plus ?** Trouver la loi de X et retrouver $E(X)$.

► **En plus ?** X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant une variance et prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer que $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)p(X>k)$.

► **En plus ?** $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels positifs telle que la série de terme général a_n soit convergente.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $b_n = na_n$.

On se propose de montrer que les séries de termes généraux b_n et R_n sont de même nature et ont même somme.

Q1. Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} ka_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k - nR_n.$$

Q2. Montrer que si la série de terme général R_n converge alors la série de terme général b_n converge.

Q3. On suppose que la série de terme général b_n converge.

Montrer que : $nR_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$.

En déduire que la série de terme général R_n converge et a même somme que la série de terme général b_n.

Exercice 4 **Critères usuels sur les séries à termes positifs 1**.

Etudier la nature de la série de terme général u_n.

1. $u_n = \ln\left(\dfrac{e^{2n}-1}{e^{2n}+1}\right)$. 2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2\ln n + (-1)^n}$. 3. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}}$. 4. $\boxed{\bigstar}$ $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

5. $a^{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}$ $(a>0)$. On rappelle que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n$ converge vers un réel γ appartenant à $]0,1[$.

Exercice 5 **Critère d'équivalents. D'après Ecricome 2009.**

Q1. Trouver la nature des séries de termes généraux $x_n = \ln(2-e^{\frac{1}{n}})$ et $y_n = \ln(2-e^{\frac{1}{n}}) - \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.

Q2. On pose $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $V_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} x_k$ et $u_n = e^{V_n}$.

a) Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

b) Montrer que $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $\ln(n\,u_n) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} y_k$.

c) En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 6 **La C.N.S. de convergence d'une série à termes positifs. Fonction génératrice d'une var**.

$\boxed{\bigstar}$

X est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

Q1. Montrer que pour tout réel x de $[-1,1]$, la série de terme général $P(X=n)\,x^n$ est absolument convergente.

On considère alors la fonction $G_X : x \to \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\,x^n$. G_X est au moins définie sur $[-1,1]$.

Q2. a) Donner la valeur de $G_X(1)$.

b) Montrer que si X prend un nombre fini de valeurs :

$$E(X) = G'_X(1) \text{ et } V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \big(G'_X(1)\big)^2.$$

Q3. a) On pose : $\forall x \in [0,1[,\ \varphi(x) = \dfrac{G_X(x) - G_X(1)}{x-1}$. Montrer que φ est croissante sur $[0,1[$. Conséquence en 1 ?

b) Montrer que X possède une espérance si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1 et qu'en cas d'existence : $E(X) = (G_X)'_g(1)$.

► **En plus ?**

Q4. a) Montrer que si n est dans $\mathbb{N}$, $G_X(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X=k)\,x^k + \mathrm{o}\,(x^n)$ au voisinage de 0. Qu'en déduire ?

b) Y est une seconde variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer que X et Y ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.

Exercice 7 **Critères usuels sur les séries à termes positifs 2**.

Etudier la nature de la série de terme général u_n.

6. $u_n = \dfrac{(\ln n)}{\sqrt{n}}\cdot$ 7. $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)\sqrt{n}}\cdot$ 8. $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}\cdot$ 9. $\boxed{\bigstar}$ $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha\,(\ln n)^\beta}$ (avec $\alpha \neq 1$) 10. $\dfrac{1}{1+t^n+t^{n+1}}$ $(t>0)$.

Exercice 8 **La série de terme général $u_{n+1} - u_n$.** $\boxed{\bigstar}$

$(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite de réels . Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est de même nature que la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$.

Application. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}\,(n/e)^n}\cdot$

Montrer que cette suite converge vers un réel L différent de 0 (on pourra considérer $v_n = \ln(p_{n+1}) - \ln(p_n)$).

En déduire un équivalent de $n!$ (en fonction de L).

Utiliser ce que vous savez sur Wallis pour calculer L.

► **Contrôle**

1. Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ est convergente. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

2. α est un réel. Donner un équivalent des suites de terme généraux $\dfrac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ (pour $\alpha \neq 1$) et $\ln(n+1) - \ln n$.

Retrouver la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}\cdot$

Exercice 9 **Critères usuels sur les séries à termes positifs 3**.

Etudier la nature de la série de terme général u_n.

11. $u_n = \sin\left(\dfrac{n+2}{n+1}\,\pi\right)$. 12. $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^3}$. 13. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}\cdot$ 14. $u_n = \dfrac{n}{a^n + \ln n}\cdot$

Exercice 10 **Produit de Cauchy de deux séries**. $\boxed{\bigstar}$

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites de réels positifs. On suppose que les séries de termes généraux u_n et v_n convergent et on pose, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$, $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$ et $W_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} w_k$.

Q1. Prouver que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $W_n \leqslant U_n V_n \leqslant W_{2n}$.

Q2. En déduire que la série de terme général w_n converge et que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Q3. $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux séries absolument convergentes. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$.

a) Montrer que la série de terme général c_n est absolument convergente.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{+\infty} b_n$ (remarquer que : $\displaystyle\left|\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n} b_j - \sum_{k=0}^{n} c_k\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |a_i| \sum_{j=0}^{n} |b_j| - \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} |a_i||b_{k-i}|$).

Q4. X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrer, en utilisant le produit de Cauchy, que :

$$\forall x \in [-1,1],\ G_{X+Y}(x) = G_X(x)\, G_Y(x).$$

T'as mieux coco ?

► **En plus ?** x est un réel tel que $|x| < 1$. Retrouver par récurrence que, pour tout élément r de $\mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+r}{r} x^n = \frac{1}{(1-x)^{r+1}} \quad \text{ou} \quad \sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1)\, x^{n-r} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}\cdot$$

► **En plus ?** Si n appartient à $\mathbb{N}^*$, on note D_n le nombre de dérangements de $[\![1,n]\!]$, c'est à dire le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ sans point fixe. Par convention On pose $D_0 = 1$.

Q1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.

Q2. Montrer que $f : x \to \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$ est au moins définie sur $]-1,1[$ et que $\forall x \in]-1,1[,\ e^x f(x) = \dfrac{1}{1-x}\cdot$

Q3. En déduire que $\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} x^n$. Par des considération de développements limités, en déduire D_n pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Exercice 11 **Critères usuels sur les séries à termes positifs 4**.

Q1. Étudier la nature de la série de terme général u_n.

15. $u_n = \ln(1+a^n)$ $(a > 0)$. 16. $u_n = \dfrac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}\cdot$

★ Q2. a) $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels et x est un réel.

Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x^n$, les séries de terme généraux u_n et x^n sont de même nature.

b) Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{x^n}{1+y^{2n}}\cdot$

Exercice 12 **Série à termes positifs (resp. négatifs) divergente. Produit infini.** ★

Q1. $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'éléments de $[0,1[$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1-u_k)$.

a) Montrer que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

b) Montrer que les séries de termes généraux u_n et $\ln(1-u_n)$ ont même nature (deux implications).

c) Montrer que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 si et seulement si la série de terme général u_n diverge.

Q2. Une urne contient b boule blanches et b boules noires. On tire une boule. Si elle est noire on s'arrête. Si elle est blanche on la remet dans l'urne en ajoutant a boules blanches et on recommence à tirer en respectant le même protocole.

Montrer que la probabilité de ne jamais obtenir une boule noire est nulle.

Exercice 13 **Critères usuels sur les séries à termes positifs 5.**

Etudier la nature de la série de terme général u_n.

17. $u_n = \dfrac{1}{\ln n}\cdot$ 18. $u_n = \dfrac{(-1)^n \cos n}{n\sqrt{n}}\cdot$ 19. $u_n = \left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)(\ln n)^\alpha$. 20. $u_n = \dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^\alpha}\cdot$

21. $\boxed{\bigstar}$ $u_n = a\,\sin\dfrac{1}{n} + \sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}$.

Exercice 14 **Suites adjacentes. Séries alternées.** $\boxed{\bigstar}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels qui est décroissante et qui converge vers zéro. ε vaut 1 ou -1.

Q1. Montrer que la série de terme général $u_n = \varepsilon(-1)^n a_n$ est convergente.

Q2. Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$: $\left|R_n\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$.

Clairement ceci vaut encore pour une suite $(\mathbf{a_n})_{\mathbf{n}\geqslant \mathbf{n_0}}$

Q3. α est un réel. Etudier la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

Q4. $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que $u_n \sim v_n$ mais que les deux séries ne sont pas de même nature.

Q5. α et x sont deux réels. Étudier la nature de la série de terme général $n^\alpha\, x^n$.

Exercice 15 **Étude d'une fonction définie par une série. Dérivation sous le signe somme.**

Q1. On pose $\forall x\in[0,+\infty[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n+x}\cdot$

Q1. Justifier la définition de f et étudier ses variations.

Q2. Montrer que $\forall x\in[0,+\infty[,\ f(2x) = \dfrac{1}{2}f(x)+\dfrac{1}{2x+1}\cdot$

Q3. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ et la déterminer.

Q4. Montrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et donner f'.

► **Contrôle 1** ESCP-2000

Étudier $f : x \to \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$ et donner un équivalent de f en 0 (on pourra comparer à une intégrale).

► **Contrôle 2** La fonction dzeta (ou dzêta ou zeta ou...).

Q1. Trouver le domaine de définition D de $f : x \to \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$.

Q2. Etudier les variations de f.

Q3. Montrer que $\forall x \in D,\ 1+\dfrac{1}{(x-1)\,2^{x-1}} \leqslant f(x) \leqslant 1+\dfrac{1}{x-1}$ (utiliser $\int_k^{k+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t$). Etudier f aux bornes de son domaine de définition.

Q4. Montrer que f est dérivable en tout point de D et donner sa dérivée (on rappelle que $\forall u \in \mathbb{R},\ |e^u-1-u| \leqslant \frac{u^2}{2}\, e^{|u|}$).

Exercice 16 **Convergence normale**.

$(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ de réels telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ |u_n(x)| \leqslant \alpha_n$;
- la série de terme général α_n est convergente.

Q1. Montrer que pour tout élément x de $[a,b]$, la série de terme général $u_n(x)$ est absolument convergente.

Désormais si x est dans $[a,b]$ et n dans $\mathbb{N}$, $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x)$ et $S(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$.

Q2. x_0 est un élément de $[a,b]$. On se propose de montrer que $S : x \to S(x)$ est continue en x_0 à l'aide de la définition.

Soit ε un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que l'on peut trouver un élément p de $\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall x \in [a,b],\ |S(x)-S(x_0)| \leqslant |S_p(x)-S_p(x_0)| + 2\sum_{k=p+1}^{+\infty} \alpha_k \leqslant |S_p(x)-S_p(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Conclure en utilisant la continuité de S_p.

Q3. Montrer que si n est un élément de $\mathbb{N}$: $\left|\displaystyle\int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b S_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k$.

En déduire que : $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Q4. Montrer que la série de terme général $I_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 t^n\, e^t\,\mathrm{d}t$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} I_n$.

En Plus ? Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^k}$.
